

प्रश्नावली 1

1 → संख्याएँ 135 और 225 का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 225 &= 135 \times 1 + 90 & 135 &= 90 \times 1 + 45 \\ 135 &= 90 \times 1 + 45 & 90 &= 45 \times 2 + 0 \\ \therefore \text{HCF} &= 45 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

2 → संख्याएँ 867 और 255 का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 867 &= 255 \times 3 + 102 & 255 &= 102 \times 2 + 51 \\ 255 &= 102 \times 2 + 51 & 102 &= 51 \times 2 + 0 \\ \therefore \text{HCF} &= 51 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

3 → संख्याएँ 420 और 130 का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 420 &= 130 \times 3 + 30 & 130 &= 30 \times 4 + 10 \\ 130 &= 30 \times 4 + 10 & 30 &= 10 \times 3 + 0 \\ \therefore \text{HCF} &= 10 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

4 → संख्याएँ 196 और 38220 का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 38220 &= 196 \times 195 + 0 \\ \therefore \text{HCF} &= 196 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

5 → संख्याएँ 196 और 3822 का HCF ज्ञात करने के लिए यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म का प्रयोग कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 3822 &= 196 \times 19 + 98 \\ 196 &= 98 \times 2 + 0 \\ \therefore \text{HCF} &= 98 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

6 → दर्शाइए कि कोई भी धनात्मक विषम पूर्णांक $6q+1$ या $6q+3$ या $6q+5$ के रूप का होता है, जहाँ q कोई पूर्णांक है।

हल: माना कि a धनात्मक पूर्णांक है तो $6q+1, 6q+3$ तथा $6q+5$ सिद्ध करना है।
 $\therefore 0 \leq r < 6$, जहाँ भिन्नफल $(r) = 1, 2, 3, 4, 5$
 एल्गोरिथ्म के सूत्र से,
 $a = bq + r$
 $\therefore 6q+1, 6q+2, 6q+3, 6q+4, 6q+5$
 $\therefore$ विषम पूर्णांक $= 6q+1, 6q+3, 6q+5$
 Proved.

7 → दर्शाइए कि एक धनात्मक विषम पूर्णांक $4q+1$ या $4q+3$ के रूप का होता है, जहाँ q एक पूर्णांक है।

हल: माना कि a धनात्मक पूर्णांक है तो $4q+1$ तथा $4q+3$ सिद्ध करना है।

$\therefore 0 \leq r < 4$, जहाँ, भिन्नफल $(r) = 1, 2, 3$
 एल्गोरिथ्म के सूत्र से,

$$a = bq + r$$

$$\therefore 4q+1, 4q+2, 4q+3$$

$$\therefore \text{विषम पूर्णांक} = 4q+1, 4q+3 \text{ Proved.}$$

8 → जांच कीजिए कि क्या किसी प्रकृति संख्या n के लिए, संख्या 6^n या 6 पर समाप्त हो सकती है।

हल: माना कि $a = 6^n$

$$a = (2 \times 3)^n$$

$$a = 2^n \times 3^n$$

यहाँ 2 और 3 अभाज्य संख्या हैं। हम जानते हैं कि किसी भी संख्या का अंत भूज्य तभी होगा जब 2 और 5 के घनात्मक घात का गुणनखंड हो। $a = 2^n \times 3^n$ यह गुणनखंड अद्वितीय है।

$\therefore 6^n$ अंक 0 पर समाप्त नहीं हो सकता है।

9 → यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथम का उपयोग कर 4052 और 12576 का HCF (म.स.) ज्ञात करें।

$$\text{हल: } 12576 = 4052 \times 3 + 420$$

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

$$\therefore \text{HCF} = 4 \text{ Ans.}$$

10 → 156 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

$$\text{हल: } \begin{array}{r} 2 \overline{) 156} \\ 2 \overline{) 78} \\ 3 \overline{) 39} \\ 13 \end{array}$$

$$\therefore 156 = 2 \times 2 \times 3 \times 13 \text{ या } 2^2 \times 3 \times 13 \text{ Ans.}$$

11 → 140 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

$$\text{हल: } \begin{array}{r} 2 \overline{) 140} \\ 2 \overline{) 70} \\ 5 \overline{) 35} \\ 7 \end{array}$$

$$\therefore 140 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \text{ या } 2^2 \times 5 \times 7 \text{ Ans.}$$

12 → 196 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

$$\text{हल: } \begin{array}{r} 2 \overline{) 196} \\ 2 \overline{) 98} \\ 7 \overline{) 49} \\ 7 \end{array}$$

$$\therefore 196 = 2 \times 2 \times 7 \times 7 \text{ या } 2^2 \times 7^2 \text{ Ans.}$$

13 → 5005 को अभाज्य गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखिए।

$$\text{हल: } \begin{array}{r} 5 \overline{) 5005} \\ 7 \overline{) 1001} \\ 11 \overline{) 143} \\ 13 \end{array}$$

$$\therefore 5005 = 5 \times 7 \times 11 \times 13 \text{ Ans.}$$

14 → अभाज्य गुणनखंड द्वारा 510 और 92 का म.स. और ल.स. ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } 510 = 2 \times 3 \times 5 \times 17$$

$$92 = 2 \times 2 \times 23$$

$$\therefore 510 \text{ और } 92 \text{ का म.स.} = 2 \text{ Ans.}$$

$$\text{ल.स.} = \frac{\text{दोनों संख्याओं का गुणनफल}}{\text{म.स.}}$$

$$= \frac{2 \times 3 \times 5 \times 17 \times 2 \times 2 \times 23}{2}$$

$$= 3 \times 5 \times 17 \times 2 \times 2 \times 23 = 23460 \text{ Ans.}$$

15 → संख्या 6, 72 और 120 का अभाज्य गुणनखंड लिखिए द्वारा म.स. (HCF) और ल.स. (LCM) ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } 6 = 2 \times 3$$

$$72 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \text{ या } 2^3 \times 3^2$$

$$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \text{ या } 2^3 \times 3 \times 5$$

$$\therefore \text{HCF} = 2 \times 3 = 6 \text{ Ans. [छोटे तत्वों में 2 और 3 मिल रहा है]}$$

$$\text{ल.स.} = 2^3 \times 3^2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5$$

= 360 Ans. [ल.स. सबसे छोटा घात और
छोटा हुआ अभाज्य संख्या का गुणनफल
होता है]

16 → अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा 6,
8, 22 का म.स. और ल.स. ज्ञात करें।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 6 &= 2 \times 3 \\ 8 &= 2 \times 2 \times 2 \text{ या } 2^3 \\ 22 &= 2 \times 11 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{म.स.} = 2 \text{ Ans.}$$

$$\begin{aligned} \text{ल.स.} &= 2^3 \times 3 \times 11 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11 \\ &= 264 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

17 → अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा 9,
12 तथा 27 का म.स. और ल.स.
ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 9 &= 3 \times 3 \\ 12 &= 2 \times 2 \times 3 \text{ या } 2^2 \times 3 \\ 27 &= 3 \times 3 \times 3 \text{ या } 3^3 \end{aligned}$$

$$\text{म.स.} = 3 \text{ Ans.}$$

$$\text{ल.स.} = 2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108 \text{ Ans.}$$

18 → अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा 12,
15 तथा 21 का म.स. और ल.स.
ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 12 &= 2 \times 2 \times 3 \text{ या } 2^2 \times 3 \\ 15 &= 3 \times 5 \\ 21 &= 3 \times 7 \end{aligned}$$

$$\text{म.स.} = 3 \text{ Ans.}$$

$$\begin{aligned} \text{ल.स.} &= 2^2 \times 3 \times 5 \times 7 = 2 \times 2 \times 105 \\ &= 420 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

19 → संख्याओं 6 और 20 के अभाज्य
गुणनखंड विधि से HCF और LCM

ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 6 &= 2 \times 3 \\ 20 &= 2 \times 2 \times 5 \text{ या } 2^2 \times 5 \end{aligned}$$

$$\text{HCF} = 2$$

$$\text{LCM} = 2^2 \times 3 \times 5 = 4 \times 15 = 60 \text{ Ans.}$$

20 → अभाज्य गुणनखंड विधि द्वारा
96 और 404 का HCF ज्ञात कीजिए
और फिर इनका LCM ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } 96 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \text{ या } 2^5 \times 3$$

$$404 = 2 \times 2 \times 101 \text{ या } 2^2 \times 101$$

$$\text{HCF} = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{LCM} = 2^5 \times 3 \times 101$$

$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 101$$

$$= 9696 \text{ Ans.}$$

21 → HCF (306, 657) = 9 दिया है।

LCM (306, 657) ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: HCF} = 9$$

$$\text{LCM} = \frac{\text{दोनों संख्याओं का गुणनफल}}{\text{HCF}}$$

$$= \frac{306 \times 657}{9}$$

$$= 34 \times 657 = 22338 \text{ Ans.}$$

22 → यदि HCF (510, 92) = 2 दिया है तो

LCM (510, 92) ज्ञात करें।

$$\text{हल: HCF} = 2$$

$$\text{LCM} = \frac{\text{दोनों संख्याओं का गुणनफल}}{\text{HCF}}$$

$$= \frac{510 \times 92}{2}$$

$$= 46 \times 510 = 23460 \text{ Ans.}$$

23 → गुणनखंड विधि से 8, 9 और 25 का म.स. निकालें।

हल: $8 = 2 \times 2 \times 2$

$9 = 3 \times 3$

$25 = 5 \times 5$

∴ म.स. = 1 Ans.

24 → दो संख्याओं का ल.स. और म.स. क्रमशः 20 और 5 है तथा दूसरी संख्या 5 है तो पहली संख्या निकालें।

हल: ल.स. = 20

म.स. = 5

दूसरी सं. = 5

पहली सं. = $\frac{\text{ल.स.} \times \text{म.स.}}{\text{दूसरी सं.}} = \frac{20 \times 8}{5}$

पहली सं. = 20 Ans.

25 → दो संख्याओं का म.स. 145 तथा उनका ल.स. 2175 है। यदि एक संख्या 725 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात करें।

हल: म.स. = 145

ल.स. = 2175

एक सं. = 725

दूसरी सं. = $\frac{\text{म.स.} \times \text{ल.स.}}{\text{एक सं.}}$

$= \frac{145 \times 2175}{725} = 145 \times 3 = 435 \text{ Ans.}$

26 → 2. पत्र को $\frac{1}{9}$ के रूप में बदलें।

हल: 2. पत्र का $\frac{1}{9}$ रूप = $\frac{247-2}{99} = \frac{245}{99} \text{ Ans.}$

27 → 0.3 को $\frac{1}{9}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

हल: 0.3 का $\frac{1}{9}$ रूप = $\frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ Ans.}$

28 → 0.6 को $\frac{1}{9}$ के रूप में बदलें।

हल: 0.6 का $\frac{1}{9}$ रूप = $\frac{6-0}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \text{ Ans.}$

29 → 2.53 को $\frac{1}{9}$ के रूप में बदलें।

हल: 2.53 का $\frac{1}{9}$ रूप = $\frac{153-25}{90}$

$= \frac{128}{90} = \frac{38}{15} \text{ Ans.}$

30 → 1.35 को $\frac{1}{9}$ के रूप में बदलें।

हल: 1.35 का $\frac{1}{9}$ रूप = $\frac{135-13}{90}$

$= \frac{122}{90} = \frac{61}{45} \text{ Ans.}$

31 → 31. पत्र को $\frac{1}{9}$ के रूप में बदलें।

हल: 31. पत्र का $\frac{1}{9}$ रूप = $\frac{3142-31}{99}$

$= \frac{3111}{99} = \frac{1037}{33} \text{ Ans.}$

32 → 336 और 54 को यूक्लिड विभाजन

अल्गोरिथ्म विधि से HCF (म.स.)

निकालें।

हल: $336 = 54 \times 6 + 12$

$54 = 12 \times 4 + 6$

$12 = 6 \times 2 + 0$

∴ HCF = 6 Ans.

प्रश्नावली 1.3/1.4

→ सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमिय संख्या है।

हल: माना कि $\sqrt{3}$ एक परिमिय संख्या है, तो इसे सिद्ध करने के लिए a तथा b दो पूर्णांक लेते हैं।

$$\therefore \frac{a}{b} = \sqrt{3}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = (\sqrt{3})^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 3, a^2 = 3b^2$$

$a = \sqrt{3b^2} = b\sqrt{3}$, इसमें a अपरिमिय संख्या है क्योंकि $b\sqrt{3}$ एक परिमिय संख्या है, जो कि गलत है।

$\therefore$ सिद्ध हुआ कि $\sqrt{3}$ एक अपरिमिय संख्या है। Proved.

2 → सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमिय संख्या है।

हल: माना कि $\sqrt{2}$ एक परिमिय संख्या है, तो इसे सिद्ध करने के लिए a तथा b दो पूर्णांक लेते हैं।

$$\therefore \frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2, a^2 = 2b^2$$

$a = \sqrt{2b^2} = b\sqrt{2}$, इसमें a अपरिमिय संख्या है क्योंकि $b\sqrt{2}$ एक परिमिय संख्या है, जो कि गलत है।

$\therefore$ सिद्ध हुआ कि $\sqrt{2}$ एक अपरिमिय संख्या है। Proved.

3 → सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमिय संख्या है।

हल: माना कि $\sqrt{5}$ एक परिमिय संख्या है, तो इसे सिद्ध करने के लिए a तथा b दो पूर्णांक लेते हैं।

$$\therefore \frac{a}{b} = \sqrt{5}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = (\sqrt{5})^2 \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = 5$$

$$a^2 = 5b^2, a = b\sqrt{5}, \text{ इसमें } a$$

अपरिमिय संख्या है क्योंकि $b\sqrt{5}$ एक परिमिय संख्या है, जो कि गलत है।

$\therefore$ सिद्ध हुआ कि $\sqrt{5}$ एक अपरिमिय संख्या है। Proved.

4 → दर्शाइए कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमिय संख्या है।

हल: माना कि $3\sqrt{2}$ एक परिमिय संख्या है, तो इसे सिद्ध करने के लिए a तथा b दो पूर्णांक लेते हैं।

$$\therefore \frac{a}{b} = 3\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \frac{a}{3b} = \sqrt{2}$, इसमें $\frac{a}{3b}$ अपरिमिय संख्या है क्योंकि $\sqrt{2}$ एक परिमिय संख्या है, जो गलत है।

$\therefore$ सिद्ध हुआ कि $3\sqrt{2}$ एक अपरिमिय संख्या है। Proved.

5 → दर्शाइए कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमिय संख्या है।

हल: माना कि $5 - \sqrt{3}$ एक परिमिय संख्या है, तो इसे सिद्ध करने के लिए a तथा b दो पूर्णांक लेते हैं।

$$\text{हल: } \frac{a}{b} = 5 - \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} + \sqrt{3} = 5, \Rightarrow \sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b},$$

इसमें $5 - \frac{a}{b}$ एक अपरिमेय संख्या है
जहाँकि $\sqrt{3}$ एक परिमेय संख्या है,
जो गलत है।

∴ सिद्ध हुआ कि $5 - \sqrt{3}$ एक अपरिमेय संख्या है। Proved.

6 → सिद्ध कीजिए कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल: माना कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक परिमेय संख्या है, तो इसे सिद्ध करने के लिए a तथा b दो पूर्णांक लेंगे हैं।

$$\therefore \frac{a}{b} = 3 + 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} - 3 = 2\sqrt{5}, \text{ इसमें } \frac{a}{b} - 3 \text{ एक अपरिमेय संख्या है (जहाँकि } 2\sqrt{5} \text{ एक परिमेय संख्या है, जो गलत है।)}$$

∴ सिद्ध हुआ कि $3 + 2\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है। Proved.

7 → दर्शाइए कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है।

हल: माना कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक परिमेय संख्या है, तो इसे सिद्ध करने के लिए a तथा b दो पूर्णांक लेंगे हैं।

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$b = a\sqrt{2}$, इसमें b एक अपरिमेय संख्या है (जहाँकि $a\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है, जो गलत है।)

∴ सिद्ध हुआ कि $\frac{1}{\sqrt{2}}$ एक अपरिमेय संख्या है। Proved.

8 → सांत आधर्ती : → जिस परिमेय संख्या में हर का अभाज्य गुणनखंड 2 या 5 हो या दोनों हो उसे सांत आधर्ती कहते हैं।

9 → बताइए कि $\frac{17}{8}$ परिमेय संख्या का दशमलव पसार सांत है या असांत आधर्ती है।

हल: $\frac{17}{8} = \frac{17}{2 \times 2 \times 2}$, यह दशमलव पसार सांत है। Ans.

10 → बिना लम्बी विभाजन प्रक्रिया किए बताइए कि $\frac{7}{80}$ परिमेय संख्या के दशमलव पसार सांत है या असांत आधर्ती है।

हल: $\frac{7}{80} = \frac{7}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5}$, यह दशमलव पसार सांत है। Ans.

11 → परिमेय $\frac{7^3}{2^4 \times 5^3}$ संख्या का दशमलव बिस्तर दशमलव के कितने स्थानों के बाद सांत हो जायेगा।

$$\text{हल: } = \frac{7^3}{2^4 \times 5^3} = \frac{7 \times 7 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5} = \frac{343}{2000} = 0.1715$$

∴ 0.1715 दशमलव के 4 स्थान के बाद सांत हो जाएगा। Ans.

12 → निम्नलिखित परिमेय संख्याओं के दशमलव पसार सांत है या असांत है।

$$(i) \frac{1}{3} \quad (ii) \frac{7}{2} \quad (iii) \frac{35}{50} \quad (iv) \frac{6}{15} \quad (v) \frac{129}{2^2 \times 5^3 \times 7^5}$$

$$(vi) \frac{29}{343}$$

$$(i) \frac{1}{3}$$

हल: $= \frac{1}{3}$ यह असांत है। Ans.

$$(ii) \frac{7}{2}$$

हल: $\frac{7}{2}$ यह सांत है Ans. = $\frac{7}{2 \times 5}$ यह सांत है Ans.

$$(iv) \frac{6}{15}$$

$$\text{हल: } \frac{6}{15} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}$$

यह सांत है Ans.

$$(v) \frac{129}{2^2 \times 5^2 \times 7^5}$$

$$\text{हल: } \frac{129}{2^2 \times 5^2 \times 7^5}$$

यह असांत है Ans.

$$(vi) \frac{29}{3 \times 3 \times 3}$$

$$\text{हल: } \frac{29}{3 \times 3 \times 3} = \frac{29}{27}, \text{ यह असांत है Ans.}$$

प्रश्नावली 2.2

1 → $x^2 = 9$ का हल समुच्चय लिखें।

अथवा: $x - 9 = 0$ के भून्यक ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } x^2 = 9, x = \sqrt{9} = \pm 3 \text{ या } (3, -3) \text{ Ans.}$$

2 → बहुपद $x^2 - 3$ के भून्यक ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } x^2 - 3 = 0$$

$$x^2 = 0 + 3$$

$$x^2 = 3$$

$$x = \pm \sqrt{3}$$

$$\therefore x = \sqrt{3}, -\sqrt{3} \text{ Ans.}$$

3 → बहुपद $x^2 - 15$ के भून्यक ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } x^2 - 15 = 0$$

$$x^2 = 0 + 15$$

$$x^2 = 15$$

$$x = \pm \sqrt{15}$$

$$x = \sqrt{15}, -\sqrt{15} \text{ Ans.}$$

4 → बहुपद $4x^2 - 3$ के भून्यक ज्ञात करें।

$$\text{हल: } 4x^2 - 3 = 0$$

$$4x^2 = 0 + 3$$

$$4x^2 = 3$$

$$x^2 = \frac{3}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2 \times 2}}$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ Ans.}$$

5 → यदि $4x^2 - 25 = 0$, तो x का मान निकालें।

$$\text{हल: } 4x^2 - 25 = 0$$

$$4x^2 = 0 + 25$$

$$4x^2 = 25$$

$$x^2 = \frac{25}{4}$$

$$x = \sqrt{\frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{5 \times 5}{2 \times 2}}$$

$$\therefore x = \frac{5}{2}, -\frac{5}{2} \text{ Ans.}$$

6 → एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए जिसके भून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः -3 और 2 हैं।

$$\text{हल: भून्यकों का योग } (\alpha + \beta) = -3$$

$$,, ,, \text{ गुणनफल } (\alpha\beta) = 2$$

$$\therefore \text{द्विघात बहुपद} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$= x^2 - (-3)x + 2$$

$$= x^2 + 3x + 2 \text{ Ans.}$$

7 → एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके भून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः 4 और 1 हैं।

$$\text{हल: भून्यकों का योग } (\alpha + \beta) = 4$$

$$,, ,, \text{ गुणनफल } (\alpha\beta) = 1$$

$$\text{द्विघात बहुपद} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$= x^2 - 4x + 1 \text{ Ans.}$$

8 → उस द्विघात बहुपद को ज्ञात करें जिसके भून्यकों का योग 8 एवं गुणनफल 12 हैं।

$$\text{हल: भून्यकों का योग } (\alpha + \beta) = 8$$

$$,, ,, \text{ गुणनफल } (\alpha\beta) = 12$$

$$\text{द्विघात बहुपद} = ?$$

सूत्र से,

$$\text{द्विघात बहुपद} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

$$= x^2 - 8x + 12 \text{ Ans.}$$

3 → एक द्विघात बहुपद ज्ञात करें, जिसके भून्यकों का योग 1 तथा गुणनफल 1 हो।

हल: भून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = 1$
 " " गुणनफल $(\alpha\beta) = 1$

$$\begin{aligned}\text{द्विघात बहुपद} &= x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta \\ &= x^2 - x + 1 \text{ Ans.}\end{aligned}$$

4 → एक द्विघात बहुपद ज्ञात कीजिए, जिसके भून्यकों का योग तथा गुणनफल क्रमशः $\frac{1}{4}$ और -1 हैं।

हल: भून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = \frac{1}{4}$
 " " गुणनफल $(\alpha\beta) = -1$

द्विघात बहुपद = ?

द्विघात समी. के सूत्र से,

$$\text{द्विघात समी.} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{4}x + (-1) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{x}{4} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2 - x - 4}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - x - 4 = 0$$

$$\therefore \text{द्विघात बहुपद} = 4x^2 - x - 4 \text{ Ans.}$$

5 → बहुपद के मूलों का योग और गुणनफल

$\frac{1}{4}$ और $\frac{1}{4}$ हैं तो बहुपद निकालें।

हल: मूलों का योग $(\alpha + \beta) = \frac{1}{4}$
 " " गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{1}{4}$

द्विघात बहुपद = ?

द्विघात समी. के सूत्र से,

$$\text{द्विघात समी.} = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{1} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4x^2 - x + 1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore \text{द्विघात बहुपद} = 4x^2 - x + 1 \text{ Ans.}$$

12 → यदि द्विघात समीकरण के मूल 5 और -5 हैं तो उस समीकरण को लिखें।

हल: पहला मूल $(\alpha) = 5$

दूसरा मूल $(\beta) = -5$

$$\text{द्विघात समी.} = (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x - (-5)) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 5)(x + 5) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (5)^2 = 0 \quad [a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)]$$

$$\Rightarrow x^2 - 25 = 0 \text{ Ans.}$$

13 → यदि द्विघात समीकरण के मूल 2 और 9 हैं तो उस समीकरण को लिखें।

हल: पहला मूल $(\alpha) = 2$

दूसरा मूल $(\beta) = 9$

$$\text{द्विघात समीकरण} = (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 9) = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 9) - 2(x - 9) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 9x - 2x + 18 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 11x + 18 = 0 \text{ Ans.}$$

14 → द्विघात बहुपद $x^2 + 7x + 10$ के भून्यक ज्ञात कीजिए और भून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध को सत्यता की जाँच कीजिए।

हल: भून्यक के लिए,

$$\therefore x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x + 2x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+5) + 2(x+5) = 0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x+5) = 0$$

$$x+2=0 \quad | \quad x+5=0$$

$$x = -2 \quad | \quad x = -5$$

$$\therefore x = -2, -5 \text{ Ans.}$$

जॉच

$$\therefore x^2 + 7x + 10 = 0$$

$$a=1, b=7, c=10$$

15 → द्विघात बहुपद $5x^2 - 4 - 8x$ के भून्यक ज्ञात कीजिए और भून्यकों तथा गुणांकों के बीच के संबंध की सत्यता की जाँच कीजिए।

हल: भून्यक के लिए,

$$\therefore 5x^2 - 4 - 8x = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 5x^2 - 10x + 2x - 4 = 0$$

$$\Rightarrow 5x(x-2) + 2(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow (5x+2)(x-2) = 0$$

$$5x+2=0 \quad | \quad x-2=0$$

$$5x = -2 \quad | \quad x = 2$$

$$x = -\frac{2}{5} \quad | \quad x = 2$$

$$\therefore x = -\frac{2}{5}, 2 \text{ Ans.}$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$-2 + (-5) = \frac{-7}{1}$$

$$\Rightarrow -2-5 = -7$$

$$\Rightarrow -7 = -7$$

Proved.

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$-2 \times (-5) = \frac{10}{1}$$

$$\Rightarrow 10 = 10$$

Proved.

जॉच

$$\therefore 5x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$a=5, b=-8$$

$$c=-4$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$-\frac{2}{5} + \frac{2}{1} = \frac{-(-8)}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{-2+10}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{5} = \frac{8}{5}$$

Proved.

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{5} \times 2 = \frac{-4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{5} = \frac{-4}{5} \text{ Proved.}$$

16 → द्विघात बहुपद $y^2 - 3$ के भून्यक ज्ञात कीजिए और भून्यक तथा गुणांकों के बीच संबंध की सत्यता

की जाँच कीजिए।

हल: भून्यक के लिए,

$$\therefore y^2 - 3 = 0$$

$$y^2 = 0 + 3$$

$$y^2 = 3$$

$$y = \pm \sqrt{3}$$

$$y = \sqrt{3}, -\sqrt{3}$$

जॉच

$$\therefore y^2 - 3 = 0$$

$$a=1, b=0, c=-3$$

$$\alpha + \beta = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = \frac{-0}{1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} - \sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0 \text{ Proved.}$$

फिर

$$\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \times (-\sqrt{3}) = \frac{-3}{1}$$

$$\Rightarrow -3 = -3 \text{ Proved.}$$

17 → यदि बहुपद $x^3 - 3x^2 + x + 1$ के भून्यक a, b, c, d हों, तो a और b का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $x^3 - 3x^2 + x + 1$

$$a=1, b=-3, c=1, d=1$$

$$\text{भून्यक } \alpha = a - b$$

$$\beta = a$$

$$\gamma = a + b$$

$$\therefore \text{भून्यकों का योग } (\alpha + \beta + \gamma) = \frac{-b}{a}$$

$$\Rightarrow a - b + a + a + b = \frac{-(-3)}{1}$$

$$\Rightarrow 3a = 3$$

$$a = \frac{3}{3} = 1 \text{ Ans.}$$

फिर

$$\text{भून्यकों का गुणलब्ध } (\alpha \beta \gamma) = \frac{-d}{a}$$

$$\Rightarrow (a - b)a(a + b) = \frac{-1}{1}$$

$$\Rightarrow a(a^2 - b^2) = -1$$

$$\Rightarrow 1(1^2 - b^2) = -1$$

$$\Rightarrow 1(1 - b^2) = -1$$

$$\Rightarrow 1 - b^2 = -1$$

$$+b^2 = -1 - 1 = -2$$

$$b = \sqrt{2}$$

$$\therefore \begin{cases} a = 1 \\ b = \sqrt{2} \end{cases} \text{ Ans}$$

18 → द्विघात बहुपद का भूज्याक ज्ञात कीजिए। दिया गया बहुपद $x^2 - 2x - 8$ है।

हल: $x^2 - 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 4x + 2x - 8 = 0$

$\Rightarrow x(x-4) + 2(x-4) = 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-4) = 0$

$\Rightarrow x+2=0 \quad | \quad x-4=0$
 $x = -2 \quad | \quad x = 4$

$\therefore x = -2, 4$ Ans.

19 → गुणतखंड विधि से द्विघात समीकरण $x^2 - 3x - 10 = 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

हल: $x^2 - 3x - 10 = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 2x - 10 = 0$

$\Rightarrow x(x-5) + 2(x-5) = 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-5) = 0$

$x+2=0 \quad | \quad x-5=0$

$x = -2 \quad | \quad x = 5$

$\therefore x = -2, 5$ Ans.

प्रश्नावली 2.3

1 → $4x^2 + 5x + 2$ को $x+3$ से भाग दीजिए।

हल: $x+3 \overline{) 4x^2 + 5x + 2}$ ($4x-7$)

$\underline{4x^2 + 12x}$
 $-7x + 2$
 $\underline{-7x - 21}$
 $+ \quad +$
 23

भागफल = $4x - 7$ Ans.

शेषफल = 23 Ans.

2 → $2x^2 + 3x + 1$ को $x+2$ से भाग दीजिए।

हल: $x+2 \overline{) 2x^2 + 3x + 1}$ ($2x-1$)

$\underline{2x^2 + 4x}$
 $-x + 1$
 $\underline{-x - 2}$
 $+ \quad +$
 3

भागफल = $2x - 1$ Ans.

शेषफल = 3 Ans.

3 → $2x^3 + 3x + 1$ को $x+2$ से भाग दीजिए।

हल: $x+2 \overline{) 2x^3 + 3x + 1}$ ($2x^2 - 4x + 11$)

$\underline{2x^3 + 4x^2}$
 $-4x^2 + 3x$
 $\underline{-4x^2 - 8x}$
 $+ \quad +$
 $11x + 1$
 $\underline{11x + 22}$
 -21

भागफल = $2x^2 - 4x + 11$ Ans.

शेषफल = -21 Ans.

4 → $x^3 - 3x^2 + 5x - 3$ को $x^2 - 2$ से भाग दीजिए।

हल: $x^2-2 \overline{) x^3 - 3x^2 + 5x - 3}$ ($x-3$)

$\underline{x^3 - 2x}$
 $-3x^2 + 5x - 3$
 $\underline{-3x^2 + 6x}$
 $+ \quad -$
 $7x - 9$

भागफल = $x - 3$ Ans.

शेषफल = $7x - 9$ Ans.

5 $\rightarrow 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ के सभी भून्यक ढात कीलिए, यदि आपकों इसके दो भून्यक $\sqrt{2}$ और $-\sqrt{2}$ ढात हैं।

हल: दो भून्यक $(x) = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

$$\therefore (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0, \Rightarrow x^2 - 2 = 0$$

$$x^2 - 2 \mid 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$$

$$\begin{array}{r} 2x^2 - 3x + 1 \\ x^2 - 2 \overline{) 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2} \\ \underline{2x^4} - 4x^2 - 2 \\ + \\ \hline -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\ -3x^3 + 6x \\ \hline + \\ \hline x^2 - 2 \\ x^2 - 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\therefore 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(x-1) - 1(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow 2x-1=0 \mid x-1=0$$

$$2x=1 \mid x=1$$

$$x = \frac{1}{2} \mid$$

$\therefore$ इसके सभी भून्यक $= \sqrt{2}, -\sqrt{2}, 1, \frac{1}{2}$
Ans.

6 $\rightarrow 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ के अन्य सभी भून्यक ढात कीलिए, यदि इसके दो भून्यक $\sqrt{3}$ और $-\sqrt{3}$ हैं।

हल: दो भून्यक $x = \sqrt{3}, -\sqrt{3}$

$$\therefore (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{5}{3} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3x^2 - 5}{3} = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 5 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^2 + 2x + 1 \\ 3x^2 - 5 \overline{) 3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5} \\ \underline{3x^4} - 5x^2 - 5 \\ + \\ \hline 6x^3 + 3x^2 - 10x - 5 \\ \underline{6x^3} - 10x - 5 \\ + \\ \hline 3x^2 - 5 \\ \underline{3x^2 - 5} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\therefore x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x + x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+1) + 1(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+1) = 0$$

$$x+1=0 \mid x+1=0$$

$$x = -1 \mid x = -1$$

$\therefore$ इसके अन्य सभी भून्यक $(x) = -1, -1$
Ans.

7 $\rightarrow$ बहुपद $2x^3 + x^2 - 6x - 3$ के सभी भून्यक ढात कीलिए, यदि इसके दो भून्यक $-\sqrt{3}$ और $\sqrt{3}$ हैं।

हल: दो भून्यक $(x) = -\sqrt{3}, \sqrt{3}$

$$\therefore (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3}) = 0$$

$$x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0, \Rightarrow x^2 - 3 = 0$$

$$\text{हल: } x^2 - 3 \mid 2x^3 + x^2 - 6x - 3(2x + 1)$$

$$\begin{array}{r} 2x^3 + x^2 - 6x - 3 \\ - (2x^3 + 6x) \\ \hline x^2 - 6x - 3 \\ - (x^2 + 3) \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\therefore 2x + 1 = 0$$

$$2x = 0 - 1$$

$$2x = -1$$

$$x = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{अन्य सभी भून्यक (x) = } -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}, \sqrt{3} \text{ Ans.}$$

प्रश्नावली 3.1

1 → अविरोधि समीकरण, अद्वितीय हल, केवल एक हल, प्रतिच्छेद या संगत : → जिस समी. का तीनों मान बराबर न हो उसे वही कहते हैं।

$$\text{जैसे: } -\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

2 → विरोधी समीकरण, कोई हल नहीं, समांतर हल, असंगत समीकरण : → जिस समी. का पहला दो मान बराबर हो उसे वही कहते हैं।

$$\text{जैसे: } -\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

3 → आश्रित समीकरण, संगत, संपाती हल, अनगिनत हल या अपरिमित रूप से अनेक हल : → जिस समी. का तीनों मान बराबर हो उसे वही कहते हैं। जैसे: $-\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

4 → $5x - 3y + 7 = 0, 3x + 2y + 3 = 0$ का कितना हल होगा।

$$\text{हल: } 5x - 3y + 7 = 0 \text{ — (i)}$$

$$3x + 2y + 3 = 0 \text{ — (ii)}$$

$$a_1 = 5, b_1 = -3, c_1 = 7$$

$$a_2 = 3, b_2 = 2, c_2 = 3$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{5}{3} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{7}{3}$$

यह अद्वितीय हल है इसलिए इसका दो हल होगा Ans.

5 → प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए:—

$$3x - 5y = 20 \text{ और } x + 2y = 3$$

$$\text{हल: } 3x - 5y = 20 \text{ — (i)}$$

$$x + 2y = 3$$

$$x = 3 - 2y \text{ — (ii)}$$

समी. (i) में समी. (ii) प्रतिस्थापित करने पर

$$3x - 5y = 20$$

$$\Rightarrow 3(3 - 2y) - 5y = 20$$

$$\Rightarrow 9 - 6y - 5y = 20$$

$$\Rightarrow -11y = 20 - 9$$

$$\Rightarrow -11y = 11$$

$$y = \frac{11}{-11}$$

$$y = -1$$

समी. (ii) में y का मान रखने पर

$$x = 3 - 2y$$

$$x = 3 - 2 \times (-1)$$

$$x = 3 + 2 = 5 \text{ Ans.}$$

$$y = -1 \text{ Ans.}$$

6 → प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए:—

$$7x - 15y = 2 \text{ और } x + 2y = 3$$

$$\text{हल: } 7x - 15y = 2 \text{ — (i)}$$

$$x + 2y = 3$$

$$x = 3 - 2y \text{ — (ii)}$$

समी. (i) में समी. (ii) प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{aligned} 7x - 15y &= 2 \\ \Rightarrow 7(3 - 2y) - 15 &= 2 \\ \Rightarrow 21 - 14y - 15 &= 2 \\ \Rightarrow -29y &= 2 - 21 \\ \Rightarrow +29y &= +19 \end{aligned}$$

$$y = \frac{19}{29}$$

समी. (ii) में y का मान रखने पर

$$\begin{aligned} x &= 3 - 2y \\ x &= 3 - 2 \times \frac{19}{29} \\ x &= 3 - \frac{38}{29} \\ x &= \frac{87 - 38}{29} \\ x &= \frac{49}{29} \text{ Ans.} \end{aligned}$$

$$y = \frac{19}{29} \text{ Ans.}$$

7 → प्रतिस्थापन विधि से हल कीजिए 1-

$$3x - 5y - 4 = 0 \text{ और } 9x = 2y + 7$$

$$\text{हल: } 3x - 5y - 4 = 0$$

$$3x - 5y = 4 \text{ — (i)}$$

$$9x = 2y + 7$$

$$x = \frac{2y + 7}{9} \text{ — (ii)}$$

समी. (i) में समी. (ii) प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 4 \\ \Rightarrow 3\left(\frac{2y + 7}{9}\right) - 5y &= 4 \\ \Rightarrow \frac{2y + 7}{3} - \frac{5y}{1} &= 4 \\ \Rightarrow \frac{2y + 7 - 15y}{3} &= 4 \\ \Rightarrow \frac{-13y + 7}{3} &= 4 \\ \Rightarrow -13y + 7 &= 12 \\ \Rightarrow -13y &= 12 - 7 \\ \Rightarrow -13y &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -\frac{5}{13} \text{ Ans.} \\ \text{समी. (ii) में } y \text{ का मान रखने पर} \\ 3x - 5y &= 4 \\ \Rightarrow 3x - 5 \times -\frac{5}{13} &= 4 \\ \Rightarrow 3x + \frac{25}{13} &= 4 \\ 3x &= 4 - \frac{25}{13} \\ 3x &= \frac{52 - 25}{13} \\ 3x &= \frac{27}{13} \\ x &= \frac{9}{13} \text{ Ans.} \end{aligned}$$

8 → प्रतिस्थापन विधि द्वारा हल कीजिए

$$x + y = 5 \text{ और } 2x - 3y = 4$$

$$\text{हल: } x + y = 5$$

$$x = 5 - y \text{ — (i)}$$

$$2x - 3y = 4 \text{ — (ii)}$$

समी. (ii) में समी. (i) प्रतिस्थापित करने पर

$$\begin{aligned} 2x - 3y &= 4 \\ \Rightarrow 2(5 - y) - 3y &= 4 \\ \Rightarrow 10 - 2y - 3y &= 4 \\ \Rightarrow -5y &= 4 - 10 \\ \Rightarrow +5y &= +6 \end{aligned}$$

$$y = \frac{6}{5}$$

समी. (i) में y का मान रखने पर

9 → हल कीजिए:

$$\frac{4}{x} + 3y = 8$$

$$\frac{6}{x} - 4y = -5$$

$$\text{हल: } \frac{4}{x} + 3y = 8 \text{ — (i) } \times 6$$

$$\frac{6}{x} - 4y = -5 \text{ — (ii) } \times 4$$

$$\Rightarrow \frac{24}{x} + 18y = 48$$

$$\Rightarrow \frac{24}{x} - 16y = -20$$

$$y = \frac{68}{34} \times 2$$

$$y = 2$$

समी. (i) में y का मान रखने पर

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} + 3y &= 8 \\ \Rightarrow \frac{y}{x} + 3 \times 2 &= 8 \\ \Rightarrow \frac{y}{x} + 6 &= 8 \\ \Rightarrow \frac{y}{x} &= 8 - 6 \\ \Rightarrow \frac{y}{x} &= 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2x &= 4 \\ x &= \frac{4}{2} \\ x &= 2 \text{ Ans.} \\ y &= 2 \text{ Ans.}\end{aligned}$$

10 → हल कीजिए :-

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} + 3y &= 14 \\ \frac{3}{x} - 4y &= 23\end{aligned}$$

हल :-

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} + 3y &= 14 \quad \text{--- (i) } \times 3 \\ \frac{3}{x} - 4y &= 23 \quad \text{--- (ii) } \times 4 \\ \Rightarrow \frac{12}{x} + 9y &= 42 \\ \Rightarrow \frac{12}{x} - 16 &= 42 \\ \frac{12}{x} + & \quad \quad \quad \\ \hline 25y &= -60 \\ y &= \frac{-60}{25} \times 2 \\ y &= -2\end{aligned}$$

समी. (i) में y का मान रखने पर

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} + 3y &= 14 \\ \Rightarrow \frac{y}{x} + 3 \times (-2) &= 14 \\ \Rightarrow \frac{y}{x} - 6 &= 14 \\ \Rightarrow \frac{y}{x} &= 14 + 6 \\ \Rightarrow \frac{y}{x} &= 20 \\ 20x &= 4 \\ x &= \frac{4}{20} \\ x &= \frac{1}{5} \text{ Ans.} \\ y &= -2 \text{ Ans.}\end{aligned}$$

11 → हल कीजिए :

$$\begin{aligned}\frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= 13 \\ \frac{5}{x} - \frac{4}{y} &= -2\end{aligned}$$

हल: $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} = 13$ --- (i) $\times 5$

$$\begin{aligned}\frac{5}{x} - \frac{4}{y} &= -2 \quad \text{--- (ii) } \times 2 \\ \Rightarrow \frac{10}{x} + \frac{15}{y} &= 65 \\ \Rightarrow \frac{10}{x} - \frac{8}{y} &= -4 \\ \frac{10}{x} + & \quad \quad \quad \\ \hline \frac{23}{y} &= 69\end{aligned}$$

$$69y = 23$$

$$y = \frac{23}{69} = \frac{1}{3}$$

समी. (i) में y का मान रखने

पर

$$\begin{aligned}\frac{2}{x} + \frac{3}{y} &= 13 \\ \frac{2}{x} + \frac{3}{\frac{1}{3}} &= 13 \\ \frac{2}{x} + 3 \times 3 &= 13 \\ \frac{2}{x} + 9 &= 13 \\ \frac{2}{x} &= 13 - 9 \\ \frac{2}{x} &= 4 \\ 4x &= 2 \\ x &= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ Ans.} \\ y &= \frac{1}{3} \text{ Ans.}\end{aligned}$$

12 → हल कीजिए :

$$\begin{aligned}\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} &= 2 \\ \frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} &= 1\end{aligned}$$

हल: $\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$ --- (i) $\times 6$

$$\begin{aligned}\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} &= 1 \quad \text{--- (ii) } \times 5 \\ \Rightarrow \frac{30}{x-1} + \frac{6}{y-2} &= 12 \\ \Rightarrow \frac{30}{x-1} - \frac{15}{y-2} &= 5 \\ \frac{30}{x-1} + & \quad \quad \quad \\ \hline\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{21^3}{y-2} = 71$$

$$\Rightarrow \frac{3}{y-2} = 1$$

$$\Rightarrow y-2=3$$

$$y=3+2$$

$$y=5$$

समी. (i) में y का मान रखने पर

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{x-1} + \frac{1}{5-2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{5}{x-1} + \frac{1}{3} = 2$$

$$\frac{5}{x-1} = 2 - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{x-1} = \frac{6-1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{x-1} = \frac{5}{3}$$

$$x-1=3$$

$$x=3+1$$

$$x=4 \text{ Ans.}$$

$$y=5 \text{ Ans.}$$

13 → हल कीजिए:

$$6x + 3y = 6xy \text{ तथा } 2x + 4y = 5xy$$

$$\text{हल: } 6x + 3y = 6xy \text{ — (i)}$$

$$2x + 4y = 5xy \text{ — (ii)}$$

दोनों समी. में दोनों ओर xy से

भाग देने पर

$$\Rightarrow \frac{6x}{xy} + \frac{3y}{xy} = \frac{6xy}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 6 \text{ — (i'ii)}$$

$$\text{फिर } \frac{2x}{xy} + \frac{4y}{xy} = \frac{5xy}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{y} + \frac{4}{x} = 5 \text{ — (iv)}$$

$$\frac{6}{y} + \frac{3}{x} = 6 \text{ — (i'ii) } \times 2$$

$$\frac{2}{y} + \frac{4}{x} = 5 \text{ — (iv) } \times 6$$

$$\Rightarrow \frac{12}{y} + \frac{6}{x} = 12$$

$$\Rightarrow \frac{12}{y} + \frac{24}{x} = 30$$

$$+ \frac{18}{x} = +18$$

$$18x = 18$$

$$x = \frac{18}{18}$$

$$x=1$$

समी. (i) में x का मान रखने पर

$$\Rightarrow \frac{6}{y} - \frac{3}{x} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{6}{y} - \frac{3}{1} = 6$$

$$\Rightarrow \frac{6}{y} - 3 = 6$$

$$\Rightarrow \frac{6}{y} = 6 + 3$$

$$\Rightarrow \frac{6}{y} = 9$$

$$3y = 6$$

$$y = \frac{6}{3}$$

$$y = 2 \text{ Ans.}$$

$$x = 1 \text{ Ans.}$$

14 → हल कीजिए:

$$\frac{7x - 2y}{xy} = 5$$

$$\frac{8x + 7y}{xy} = 15$$

$$\text{हल: } \frac{7x - 2y}{xy} = 5$$

$$\Rightarrow 7x - 2y = 5xy \text{ — (i)}$$

$$\therefore \frac{8x + 7y}{xy} = 15$$

$$\Rightarrow 8x + 7y = 15xy \text{ — (ii)}$$

दोनों समी. में दोनों ओर xy से भाग देने पर

$$\Rightarrow \frac{7x}{xy} - \frac{2y}{xy} = \frac{5xy}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{7}{y} - \frac{2}{x} = 5 \text{ — (i'ii)}$$

$$\Rightarrow \frac{8x}{xy} + \frac{7y}{xy} = \frac{15xy}{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{y} + \frac{7}{x} = 15 \text{ — (iv)}$$

$$\frac{7}{y} - \frac{2}{x} = 5 \quad \text{--- (iii) } \times 8$$

$$\frac{8}{y} + \frac{7}{x} = 15 \quad \text{--- (iv) } \times 7$$

$$\Rightarrow \frac{56}{y} - \frac{16}{x} = 40$$

$$\Rightarrow \frac{56}{y} + \frac{49}{x} = 105$$

$$+ \frac{16}{x} = + \frac{16}{x}$$

$$\frac{1}{x} = 1$$

$$x = 1$$

समी. (ii) में x का मान रखने पर

$$\frac{7}{y} - \frac{2}{x} = 5$$

$$\frac{7}{y} - \frac{2}{1} = 5$$

$$\frac{7}{y} - 2 = 5$$

$$\frac{7}{y} = 5 + 2$$

$$\frac{7}{y} = 7$$

$$\frac{1}{y} = 1$$

$$y = 1 \text{ Ans.}$$

$$x = 1 \text{ Ans.}$$

15 → हल करें:

$$x + y = a - b$$

$$ax - by = a^2 + b^2$$

$$\text{हल: } x + y = a - b \quad \text{--- (i) } \times a$$

$$ax - by = a^2 + b^2 \quad \text{--- (ii) } \times 1$$

$$\Rightarrow ax + ay = a^2 + ab$$

$$\Rightarrow ax - by = a^2 + b^2$$

$$(a+b)y = -ab - b^2$$

$$(a+b)y = -b(a+b)$$

$$y = -b$$

समी. (i) में y का मान रखने पर

$$x + y = a - b$$

$$x + (-b) = a - b$$

$$x - b = a - b$$

$$x = a - b + b$$

$$x = a \text{ Ans.}$$

$$b = -b \text{ Ans.}$$

16 → हल करें:

$$ax + by = a - b$$

$$bx - ay = a + b$$

$$\text{हल: } ax + by = a - b \quad \text{--- (i) } \times b$$

$$bx - ay = a + b \quad \text{--- (ii) } \times a$$

$$\Rightarrow abx + b^2y = ab - b^2$$

$$\Rightarrow abx - a^2y = a^2 + ab$$

$$(a^2 + b^2)y = -a^2 - b^2$$

$$(a^2 + b^2)y = -1(a^2 + b^2)$$

$$y = -1$$

समी. (i) में y का मान रखने पर

$$ax + by = a - b$$

$$ax + b(-1) = a - b$$

$$ax - b = a - b$$

$$ax = a - b + b$$

$$ax = a$$

$$x = \frac{a}{a}$$

$$x = 1 \text{ Ans.}$$

$$y = -1 \text{ Ans.}$$

17 → हल करें:

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

$$ax + by = a^2 + b^2$$

$$\text{हल: } \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{bx - ay}{ab} = 0$$

$$bx - ay = 0 \text{ --- (i) } \times a$$

$$ax + by = a^2 + b^2 \text{ --- (ii) } \times b$$

$$\Rightarrow abx - a^2y = 0$$

$$\Rightarrow abx + b^2y = a^2b + b^3$$

$$(-a^2 - b^2)y = -a^2b - b^3$$

$$+ (a^2 + b^2)y = +b(a^2 + b^2)$$

$$y = b$$

समी० (i) में y का मान रखने पर

$$bx - ay = 0 \quad x = \frac{ay}{b}$$

$$bx - ax \cdot b = 0 \quad x = a \text{ Ans.}$$

$$bx - ab = 0 \quad y = b \text{ Ans.}$$

$$bx = ab$$

18 → हल करें:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2$$

$$\text{हल: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = a + b$$

$$\Rightarrow \frac{bx + ay}{ab} = \frac{a + b}{1}$$

$$\Rightarrow bx + ay = a^2b + ab^2 \text{ --- (i)}$$

$$\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 2$$

$$\Rightarrow \frac{b^2x + a^2y}{a^2b^2} = 2$$

$$\Rightarrow b^2x + a^2y = 2a^2b^2 \text{ --- (ii)}$$

$$bx + ay = a^2b + ab^2 \text{ --- (i) } \times b$$

$$b^2x + a^2y = 2a^2b^2 \text{ --- (ii) } \times 1$$

$$\Rightarrow b^2x + ab^2y = a^2b^2 + ab^3$$

$$\Rightarrow b^2x + a^2y = 2a^2b^2$$

$$(-a^2 + ab)y = -a^2b + ab^3$$

$$+ a(a - b)y = +ab^2(a - b)$$

$$y = b^2$$

समी० (i) में y का मान रखने पर

$$bx + ay = a^2b + ab^2$$

$$\Rightarrow bx + a \times b^2 = a^2b + ab^2$$

$$\Rightarrow bx + ab^2 = a^2b + ab^2$$

$$bx = a^2b + ab^2 - ab^2$$

$$bx = a^2b$$

$$x = a^2 \text{ Ans.}$$

$$y = b^2 \text{ Ans.}$$

19 → समीकरण निम्नलिखित $2x + y = 5$

और $3x + 2y = 8$ को लघुगुणन

विधि से हल करें।

$$\text{हल: } 2x + y = 5$$

$$2x + y - 5 = 0 \text{ --- (i)}$$

$$3x + 2y = 8$$

$$3x + 2y - 8 = 0 \text{ --- (ii)}$$

$$2x + y - 5 = 0 \text{ --- (i)}$$

$$3x + 2y - 8 = 0 \text{ --- (ii)}$$

$$a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = -5$$

$$a_2 = 3, b_2 = 2, c_2 = -8$$

लघुगुणन विधि से,

$$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} = \frac{1 \times (-8) - 2 \times (-5)}{2 \times 2 - 3 \times 1}$$

$$x = \frac{-8 + 10}{4 - 3} = \frac{2}{1} = 2$$

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{-5 \times 3 - (-8) \times 2}{2 \times 2 - 3 \times 1}$$

$$y = \frac{-15 + 16}{4 - 3} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\therefore x = 2 \text{ Ans.}$$

$$y = 1 \text{ Ans.}$$

20 → समीकरण निकाय $8x + 5y = 9$ और $3x + 2y = 4$ को लघुगुणन विधि से हल करें।

$$\text{हल: } 8x + 5y = 9$$

$$8x + 5y - 9 = 0 \text{ — (i)}$$

$$3x + 2y = 4$$

$$3x + 2y - 4 = 0 \text{ — (ii)}$$

$$8x + 5y - 9 = 0 \text{ — (i)}$$

$$3x + 2y - 4 = 0 \text{ — (ii)}$$

$$a_1 = 8, b_1 = 5, c_1 = -9$$

$$a_2 = 3, b_2 = 2, c_2 = -4$$

लघुगुणन विधि से,

$$x = \frac{b_1 c_2 - b_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{5 \times (-4) - 2 \times (-9)}{8 \times 2 - 3 \times 5}$$

$$x = \frac{-20 + 18}{16 - 15} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$y = \frac{c_1 a_2 - c_2 a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{-9 \times 3 - (-4) \times 8}{8 \times 2 - 3 \times 5}$$

$$y = \frac{-27 + 32}{16 - 15} = \frac{5}{1} = 5$$

$$\therefore x = -2 \text{ Ans.}$$

$$y = 5 \text{ Ans.}$$

21 → p के किन मानों के लिए निम्न समीकरणों के युग्म का एक अद्वितीय हल है।

$$4x + py + 8 = 0$$

$$2x + 2y + 2 = 0$$

$$\text{हल: } 4x + py + 8 = 0 \text{ — (i)}$$

$$2x + 2y + 2 = 0 \text{ — (ii)}$$

$$a_1 = 4, b_1 = p$$

$$a_2 = 2, b_2 = 2$$

अद्वितीय हल के लिए

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{2} \neq \frac{p}{2}$$

$$2p \neq 8$$

$$p \neq \frac{8}{2} = 4$$

$$p \neq 4 \text{ Ans.}$$

22 → α का मान जिसके लिए समीकरण निकाय $10x + 5y = \alpha - 5$, $20x + 10y - \alpha = 0$ के अनगिनत हल होंगे।

$$\text{हल: } 10x + 5y = \alpha - 5 \text{ — (i)}$$

$$20x + 10y - \alpha = 0$$

$$20x + 10y = \alpha \text{ — (ii)}$$

$$b_1 = 5, c_1 = \alpha - 5$$

$$b_2 = 10, c_2 = \alpha$$

अनगिनत हल के लिए।

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{10} = \frac{\alpha - 5}{\alpha}$$

$$\Rightarrow 10\alpha - 50 = 5\alpha$$

$$\Rightarrow 10\alpha - 5\alpha = 50$$

$$\Rightarrow 5\alpha = 50$$

$$\alpha = \frac{50}{5} = 10$$

$$\alpha = 10 \text{ Ans.}$$

23 → दो अंकों की एक संख्या एवं उसके अंकों की उलटने पर बनी संख्या का योग 66 है। यदि संख्या के अंकों का अंतर 2 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए। ऐसी संख्याएं कितनी हैं?

हल: माना कि दहाई का अंक x तथा इकाई का अंक y है तो संख्या $10x + y$ होगा तथा उलटने पर बनी संख्या $= 10y + x$

प्रथम शर्त से,

दोनों प्राप्त संख्याओं का योग $= 66$

$$\Rightarrow 10x + y + 10y + x = 66$$

$$\Rightarrow 11x + 11y = 66$$

$$\Rightarrow 11(x + y) = 66$$

$$x + y = 6 \quad \text{--- (i)}$$

दूसरी शर्त से,

अंकों का अंतर $= 2$

$$x - y = 2 \quad \text{--- (ii)}$$

$$x + y = 6 \quad \text{--- (i)}$$

$$x - y = 2 \quad \text{--- (ii)}$$

$$\begin{array}{r} x + y = 6 \\ x - y = 2 \\ \hline 2y = 4 \end{array}$$

$$y = \frac{4}{2}$$

$$y = 2$$

समी. (i) में y का

मान रखने पर

$$x + y = 6$$

$$x + 2 = 6$$

$$x = 6 - 2 = 4$$

$$\text{संख्या} = 10x + y$$

$$= 10 \times 4 + 2$$

$$= 40 + 2$$

$$= 42 \text{ Ans.}$$

उलटने पर बनी

$$\text{सं.} = 10y + x$$

$$= 10 \times 2 + 4$$

$$= 20 + 4 = 24 \text{ Ans.}$$

ऐसी दो संख्या

बनेगी $= 42, 24 \text{ Ans.}$

24 → दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 9 है। इस संख्या का नौ गुना, संख्या के अंकों की पलटने से बनी संख्या का दो गुना है। यह संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि दहाई का अंक x तथा इकाई का अंक y है तो संख्या $10x + y$ तथा पलटने पर बनी संख्या $= 10y + x$

प्रथम शर्त से,

अंकों का योग $= 9$

$$x + y = 9 \quad \text{--- (i)}$$

दूसरी शर्त से,

$$\therefore 9(10x + y) = 2(10y + x)$$

$$\Rightarrow 90x + 9y = 20y + 2x$$

$$\Rightarrow 90x - 2x + 9y - 20y = 0$$

$$\Rightarrow 88x - 11y = 0$$

$$\Rightarrow 11(8x - y) = 0$$

$$\Rightarrow 8x - y = 0 \quad \text{--- (ii)}$$

$$x + y = 9 \quad \text{--- (i)}$$

$$+ 8x - y = 0 \quad \text{--- (ii)}$$

$$\begin{array}{r} x + y = 9 \\ + 8x - y = 0 \\ \hline 9x = 9 \end{array}$$

$$x = \frac{9}{9}$$

$$x = 1$$

समी. (i) में x का मान

रखने पर

$$x + y = 9$$

$$1 + y = 9$$

$$y = 9 - 1$$

$$y = 8$$

$$\therefore \text{संख्या} = 10x + y$$

$$= 10 \times 1 + 8$$

$$= 10 + 8$$

$$= 18 \text{ Ans.}$$

25 → दो अंकों की एक संख्या एवं उसकी अंकों को उलटने पर धनी संख्या का योग 99 है। यदि संख्या के अंकों का अंतर 5 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना धी दहार्ड का अंक x तथा इकाई का अंक y है ती संख्या $10x + y$ होगा तथा उलटने पर धनी संख्या $= 10y + x$

प्रथम शर्त से,

दोनों पापर संख्याओं का योग $= 99$

$$\Rightarrow 10x + y + 10y + x = 99$$

$$\Rightarrow 11x + 11y = 99$$

$$\Rightarrow 11(x + y) = 99$$

$$x + y = \frac{99}{11} = 9$$

$$x + y = 9 \quad \text{--- (i)}$$

दूसरी शर्त से,

$$\text{अंतर} = 5$$

$$x - y = 5 \quad \text{--- (ii)}$$

$$x + y = 9 \quad \text{--- (i)}$$

$$x - y = 5 \quad \text{--- (ii)}$$

$$+ \quad \frac{2x = 14}{2}$$

$$x = \frac{14}{2} = 7$$

$$x = 7$$

समी. (i) में y का मान रखने पर

$$x + y = 9$$

$$7 + y = 9$$

$$y = 9 - 7 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{संख्या} &= 10x + y \\ &= 10 \times 7 + 2 \\ &= 70 + 2 \\ &= 72 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

26 → दो संख्याओं का अंतर 26 है और एक संख्या दूसरी संख्या की तीन गुनी है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल: एक संख्या $= x$ माना
दूसरी $= 3x$ माना

प्रथम शर्त से,

$$\text{अंतर} = 26$$

$$x - 3x = 26 \quad \text{--- (i)}$$

दूसरी शर्त से,

$$\text{एक संख्या} = 3 \times \text{दूसरी संख्या}$$

$$x = 3 \times 3x$$

$$x = 3x$$

$$x - 3x = 0 \quad \text{--- (ii)}$$

$$x - y = 26 \quad \text{--- (i)}$$

$$x - 3y = 0 \quad \text{--- (ii)}$$

$$2y = 26$$

$$y = \frac{26}{2} = 13$$

$$y = 13$$

समी. (i) में y का मान रखने पर

रखने पर

$$x - y = 26$$

$$x - 13 = 26$$

$$x = 26 + 13$$

$$x = 39 \text{ Ans.}$$

$$y = 13 \text{ Ans.}$$

27 → दो संपूरक कोणों में छोटा कोण छोटे कोण से 18 डिग्री अधिक है। उन्हें ज्ञात कीजिए।

हल: छोटा कोण $= x$ माना
छोटा $= y$ माना

प्रथम शर्त से,

$$\text{दो संपूरक कोणों का योग} = 180^\circ$$

$$x + y = 180^\circ \quad \text{--- (i)}$$

दूसरी शर्त से

बड़ा कोण = छोटा कोण + 18°

$$x = y + 18^\circ$$

$$x - y = 18^\circ \text{ --- (ii)}$$

$$x + y = 180^\circ \text{ --- (i) जोड़ने पर}$$

$$x - y = 18^\circ \text{ --- (ii)}$$

$$2x = 198^\circ$$

$$x = \frac{198}{2} 99^\circ$$

$$x = 99^\circ$$

समी. (i) में x का मान रखने पर

$$x + y = 180^\circ$$

$$99 + y = 180^\circ$$

$$y = 180 - 99^\circ$$

$$y = 81^\circ$$

$$x = 99^\circ \text{ Ans.}$$

$$y = 81^\circ \text{ Ans.}$$

28 → एक भिन्न $\frac{1}{3}$ हो जाती है, जब उसके अंश से 1 घटाया जाता है और वह $\frac{1}{4}$ हो जाती है जब हर में 8 जोड़ दिया जाता है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि अंश x तथा हर y है, तो भिन्न = $\frac{x}{y}$ होगा।

प्रथम शर्त से,

$$\frac{x-1}{y} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 3(x-1) = y$$

$$\Rightarrow 3x - 3 = y$$

$$\Rightarrow 3x - y = 3 \text{ --- (i)}$$

दूसरी शर्त से,

$$\frac{x}{y+8} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 4x = y + 8$$

$$\Rightarrow 4x - y = 8 \text{ --- (ii)}$$

$$3x - y = 3 \text{ --- (i)}$$

$$4x - y = 8 \text{ --- (ii)}$$

$$-x + 5 = -5$$

$$x = 5$$

समी. (i) में x का मान रखने पर

$$3x - y = 3 \quad | \quad -y = 3 - 15$$

$$3 \times 5 - y = 3 \quad | \quad +y = +12$$

$$15 - y = 3 \quad | \quad y = 12$$

$$\therefore \text{भिन्न} = \frac{x}{y} = \frac{5}{12} \text{ Ans.}$$

29 → यदि किसी भिन्न के अंश और हर दोनों में 2 जोड़ दिया जाए, तो वह $\frac{9}{11}$ हो जाती है। यदि अंश और हर दोनों में 3 जोड़ दिया जाए तो वह $\frac{5}{6}$ हो जाती है। वह भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि अंश x तथा हर y है तो भिन्न = $\frac{x}{y}$ होगा।

प्रथम शर्त से,

$$\frac{x+2}{y+2} = \frac{9}{11}$$

$$\Rightarrow 11(x+2) = 9(y+2)$$

$$\Rightarrow 11x + 22 = 9y + 18$$

$$\Rightarrow 11x - 9y = 18 - 22$$

$$\Rightarrow 11x - 9y = -4 \text{ --- (i)}$$

दूसरी शर्त से,

$$\frac{x+3}{y+3} = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow 6(x+3) = 5(y+3)$$

$$\Rightarrow 6x + 18 = 5y + 15$$

$$\Rightarrow 6x - 5y = 15 - 18$$

$$\Rightarrow 6x - 5y = -3 \text{ --- (ii)}$$

$$11x - 9y = -4 \text{ --- (i)}$$

$$6x - 5y = -3 \text{ --- (ii)}$$

$$\Rightarrow 66x - 54y = -24$$

$$\Rightarrow 66x - 55y = -33$$

$$-y = -9$$

$$y = 9$$

समी. (i) में y का मान रखने पर

$$11x - 9y = -4$$

$$11x - 9 \times 9 = -4$$

$$11x - 81 = -4$$

$$11x = -4 + 81$$

$$11x = 77$$

$$x = 7$$

$$\therefore \text{भिन्न} = \frac{x}{y} = \frac{7}{9}$$

$$\text{Ans}$$

30 → यदि हम अंश में 1 जोड़ दें तथा हर में से 1 घटा दें, तो भिन्न 1 में बदल जाती है। यदि हर में 1 जोड़ दें तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। वह भिन्न क्या है?

हल: माना कि अंश x तथा हर y है तो भिन्न = $\frac{x}{y}$ होगा।

प्रथम शर्त से,

$$\frac{x+1}{y-1} = 1$$

$$\Rightarrow x+1 = y-1$$

$$\Rightarrow x-y = -1-1$$

$$\Rightarrow x-y = -2 \quad \text{--- (i)}$$

दूसरी शर्त से,

$$\frac{x}{y+1} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = y+1$$

$$\Rightarrow 2x-y = 1 \quad \text{--- (ii)}$$

$$x-y = -2 \quad \text{--- (i)}$$

$$2x-y = 1 \quad \text{--- (ii)}$$

$$+x = +3$$

$$x = 3$$

समी. (i) में x का मान रखने पर

$$x-y = -2$$

$$3-y = -2$$

$$+y = -2-3 = -5$$

$$y = 5$$

$$\therefore \text{भिन्न} = \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \text{ Ans.}$$

31 → एक आयत का क्षेत्रफल 67 वर्ग इकाई कम हो जाता है, यदि उसकी लम्बाई 5 इकाई कम कर दी जाती है और चौड़ाई 3 इकाई बढ़ा दी जाती है। यदि हम लम्बाई की 3 इकाई और चौड़ाई की 2 इकाई बढ़ा दें, तो क्षेत्रफल 67 वर्ग इकाई बढ़ जाता है। आयत की विमाएँ ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि आयत का लम्बाई x तथा चौड़ाई y है तो क्षेत्रफल = xy होगा

प्रथम शर्त से,

$$लं. = x-5$$

$$चौ. = y+3$$

$$\text{आयत का क्षेत्रफल} = xy - 9$$

$$\Rightarrow (x-5)(y+3) = xy-9$$

$$\Rightarrow xy+3x-5y-15 = xy-9$$

$$\Rightarrow xy+3x-5y-xy = -9+15$$

$$\Rightarrow 3x-5y = 6 \quad \text{--- (i)}$$

दूसरी शर्त से,

$$लं. = x+3$$

$$चौ. = y+2$$

$$\therefore \text{आयत का क्षेत्रफल} = xy+67$$

$$लं. \times चौ. = xy+67$$

$$\Rightarrow (x+3)(y+2) = xy+67$$

$$\Rightarrow xy+2x+3y+6 = xy+67$$

$$\Rightarrow xy+2x+3y-xy = 67-6$$

$$\Rightarrow 2x+3y = 61 \quad \text{--- (ii)}$$

$$3x-5y = 6 \quad \text{--- (i)} \times 2$$

$$2x+3y = 61 \quad \text{--- (ii)} \times 3$$

$$\Rightarrow 6x-10y = 12$$

$$\Rightarrow 6x+9y = 183$$

$$+19y = +171$$

$$y = \frac{171}{19} = 9$$

$$y = 9$$

समी. (i) में y का मान रखने पर

$$3x-5y = 6$$

$$3x-5 \times 9 = 6$$

$$3x-45 = 6$$

$$3x = 6+45$$

$$3x = 51$$

$$x = \frac{51}{3} = 17$$

$$\left. \begin{matrix} x = 17 \\ y = 9 \end{matrix} \right\} \text{इकाई Ans.}$$

प्रश्नावली 4.

1 → द्विघात समीकरण के मूलों के वास्तविक एवं समान होने के लिए शर्तों की लिखें।

हल: मूलों के वास्तविक एवं समान के लिए शर्त $= D = b^2 - 4ac$ Ans.

2 → द्विघात बहुपद $2x^2 - 8x + 6$ के शून्यकों का योग एवं गुणनफल ज्ञात करें।

हल: $2x^2 - 8x + 6$

$a = 2, b = -8, c = 6$

शून्यकों का योग $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-(-8)}{2}$
 $= \frac{8}{2} = 4$ Ans.

शून्यकों का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a}$
 $= \frac{6}{2} = 3$ Ans.

3 → द्विघात समीकरण $-3x^2 + 4x + 5 = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल कितना होगा?

हल: $-3x^2 + 4x + 5 = 0$

$a = -3, b = 4, c = 5$

मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{-3}$
 $= \frac{4}{3}$ Ans.

गुणनफल $= \frac{c}{a} = \frac{5}{-3}$ Ans.

4 → द्विघात समीकरण $\sqrt{3}x^2 + 8x + 4\sqrt{3} = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात करें।

हल: $\sqrt{3}x^2 + 8x + 4\sqrt{3} = 0$

$a = \sqrt{3}, b = 8, c = 4\sqrt{3}$

$\alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-8}{\sqrt{3}}$ Ans.

$\alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4$ Ans.

5 → द्विघात समीकरण $\sqrt{5}x^2 - 10x - \sqrt{5} = 0$ के मूलों का योगफल एवं गुणनफल ज्ञात करें।

हल: $\sqrt{5}x^2 - 10x - \sqrt{5} = 0$

$a = \sqrt{5}, b = -10, c = -\sqrt{5}$

मूलों का योगफल $(\alpha + \beta) = \frac{-b}{a}$
 $= \frac{-(-10)}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5}$
 $= 2\sqrt{5}$ Ans.

मूलों का गुणनफल $(\alpha\beta) = \frac{c}{a} = \frac{-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$
 $= -1$ Ans.

6 → समीकरण $2x^2 - 6x + 3 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: $2x^2 - 6x + 3 = 0$

$a = 2, b = -6, c = 3$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$D = 36 - 24 = 12$

$\therefore 12 \geq 0$ यह मूल वास्तविक हैं Ans.

7 → द्विघात समीकरण का $2x^2 - 5x + 3$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: $2x^2 - 5x + 3$

$a = 2, b = -5, c = 3$

$D = ?$

सूत्र से

$D = b^2 - 4ac$
 $= (-5)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$= 25 - 24$

$= 1$

$\therefore 1 \geq 0$ हैं

मूल वास्तविक हैं Ans.

8 → समीकरण $2x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$a = 2, b = -3, c = 5$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5$
 $= 9 - 40$
 $= -31$
 $\therefore -31 < 0$ यह मूल वास्तविक नहीं हैं।
 Ans.

9 → समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए

हल: $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

$a = 3, b = -4\sqrt{3}, c = 4$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times 4$
 $= 48 - 48 = 0$

$\therefore 0 \geq 0$ यह मूलों का वास्तविक और छराछर भी है।
 Ans.

10 → समीकरण $5x^2 = 4x - 2$ का विवेचन ज्ञात करें।

हल: $5x^2 = 4x - 2$

$\Rightarrow 5x^2 - 4x + 2 = 0$

$a = 5, b = -4, c = 2$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 5 \times 2$
 $= 16 - 40$
 $= -24$ Ans.

11 → द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 6 = 0$ का विवेचन ज्ञात कीजिए।

हल: $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$a = 2, b = -7, c = 6$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 6$
 $= 49 - 48$
 $= 1$ Ans.

12 → द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ का विवेचन ज्ञात कीजिए।

हल: $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$a = \sqrt{2}, b = 7, c = 5\sqrt{2}$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac = (7)^2 - 4 \times \sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$
 $= 49 - 40 = 9$ Ans.

13 → द्विघात समीकरण $4x^2 - 5x + 3 = 0$ का विवेचन ज्ञात कीजिए और मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: $4x^2 - 5x + 3 = 0$

$a = 4, b = -5, c = 3$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 4 \times 3$
 $= 25 - 48 = -23$ Ans.

$\therefore -23 < 0$ यह मूल वास्तविक नहीं हैं।

14 → द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x + 1 = 0$ का विवेचन ज्ञात कीजिए।

8 → समीकरण $2x^2 - 3x + 5 = 0$ के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: $2x^2 - 3x + 5 = 0$

$a = 2, b = -3, c = 5$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac$

$= (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5$

$= 9 - 40$

$= -31$

$\therefore -31 \leq 0$ यह मूल

वास्तविक नहीं हैं।
Ans.

9 → समीकरण $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

के मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए

हल: $3x^2 - 4\sqrt{3}x + 4 = 0$

$a = 3, b = -4\sqrt{3}, c = 4$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac = (-4\sqrt{3})^2 - 4 \times 3 \times 4$

$= 48 - 48 = 0$

$\therefore 0 \geq 0$ यह मूलों का वास्तविक और छराछर भी है Ans.

10 → समीकरण $5x^2 = 4x - 2$ का चिह्नचक्र ज्ञात करें।

हल: $5x^2 = 4x - 2$

$\Rightarrow 5x^2 - 4x + 2 = 0$

$a = 5, b = -4, c = 2$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 5 \times 2$

$= 16 - 40$

$= -24$ Ans.

11 → द्विघात समीकरण $2x^2 - 7x + 6 = 0$ का चिह्नचक्र ज्ञात कीजिए।

हल: $2x^2 - 7x + 6 = 0$

$a = 2, b = -7, c = 6$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 6$

$= 49 - 48$

$= 1$ Ans.

12 → द्विघात समीकरण $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ का चिह्नचक्र ज्ञात कीजिए।

हल: $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$

$a = \sqrt{2}, b = 7, c = 5\sqrt{2}$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac$

$= 7^2 - 4 \times \sqrt{2} \times 5\sqrt{2}$

$= 49 - 40 = 9$ Ans.

13 → द्विघात समीकरण $4x^2 - 5x + 3 = 0$ का चिह्नचक्र ज्ञात कीजिए और मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: $4x^2 - 5x + 3 = 0$

$a = 4, b = -5, c = 3$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac$

$= (-5)^2 - 4 \times 4 \times 3$

$= 25 - 48 = -23$ Ans.

$\therefore -23 \leq 0$ यह मूल वास्तविक नहीं हैं।

14 → द्विघात समीकरण $2x^2 - 3x - 1 = 0$ का चिह्नचक्र ज्ञात कीजिए।

फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: $2x^2 - 3x + 4 = 0$

$a = 2, b = -3, c = 4$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac$

$D = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 4$

$= 9 - 32 = -23 \text{ Ans.}$

$\therefore -23 \leq 0$ यह मूल वास्तविक नहीं हैं।
Ans.

15 $\rightarrow$ द्विघात समीकरण $5x^2 - 8x + 3 = 0$

का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: $5x^2 - 8x + 3 = 0$

$a = 5, b = -8, c = 3$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac$

$= (-8)^2 - 4 \times 5 \times 3$

$= 64 - 60 = 4 \text{ Ans.}$

$\therefore 4 \geq 0$ यह मूल वास्तविक और असमान हैं।
Ans.

16 $\rightarrow$ द्विघात समीकरण $2x^2 - 4x + 3 = 0$

का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: $2x^2 - 4x + 3 = 0$

$a = 2, b = -4, c = 3$

$D = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 2 \times 3$

$= 16 - 24 = -8 \text{ Ans.}$

$\therefore -8 \leq 0$ यह मूल वास्तविक नहीं हैं।
Ans.

17 $\rightarrow$ समीकरण $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ का विविक्तकर ज्ञात कीजिए और फिर मूलों की प्रकृति ज्ञात कीजिए।

हल: $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$

$a = 3, b = -2, c = \frac{1}{3}$

$D = ?$

सूत्र से,

$D = b^2 - 4ac$

$= (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3}$

$= 4 - 4 = 0 \text{ Ans.}$

$\therefore 0 \geq 0$ यह मूल वास्तविक और बराबर हैं।
Ans.

18 $\rightarrow$ p का मान ज्ञात करें यदि समीकरण $Px(x-2)+6=0$ के मूल बराबर हैं।

हल: $Px(x-2)+6=0$

$\Rightarrow Px^2 - 2Px + 6 = 0$

$a = P, b = -2P, c = 6$

$D = 0$

$\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow (-2P)^2 - 4 \times P \times 6 = 0$

$\Rightarrow 4P^2 - 24P = 0$

$\Rightarrow 4P(P-6) = 0$

$P - 6 = 0$

$P = 6 \text{ Ans.}$

19 $\rightarrow$ p के किस मान के लिए द्वत समीकरण $Px^2 - 2x + 2 = 0$ के मूल वास्तविक हैं।

हल: $Px^2 - 2x + 2 = 0$

$a = P, b = -2, c = 2$

वास्तविक मूल के लिए,

$D \geq 0$

$\Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0$

$\Rightarrow (-2)^2 - 4 \times P \times 2 \geq 0$

$\Rightarrow 4 - 8P \geq 0$

$\Rightarrow +8P \leq +4$

$P \leq \frac{4}{8}$

$P \leq \frac{1}{2} \text{ Ans.}$

20 → P का मान निकालें, यदि द्विघात समीकरण का मूल समान है:

$$3x^2 - 5x + p = 0$$

$$\begin{aligned} \text{हल: } 3x^2 - 5x + p = 0 & \Rightarrow 25 - 12p = 0 \\ a = 3, b = -5, c = p & +12p = +25 \\ D = 0 & p = \frac{25}{12} \text{ Ans.} \\ \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 & \\ \Rightarrow (-5)^2 - 4 \times 3 \times p = 0 & \end{aligned}$$

21 → द्विघात समीकरण $2x^2 + Kx + 3 = 0$ में K का ऐसा मान ज्ञात कीजिए कि उसके दो अराखर मूल हों

$$\begin{aligned} \therefore 2x^2 + Kx + 3 = 0 & \Rightarrow K^2 - 24 = 0 \\ a = 2, b = K, c = 3 & K^2 = 24 \\ D = 0 & K = \sqrt{24} \\ \Rightarrow b^2 - 4ac = 0 & K = \sqrt{2 \times 2 \times 2 \times 3} \\ \Rightarrow K^2 - 4 \times 2 \times 3 = 0 & K = 2\sqrt{6} \text{ Ans.} \end{aligned}$$

22 → K के किस मान के लिए द्विघात समीकरण $2x^2 - 10x + K = 0$ के मूल वास्तविक हों

$$\begin{aligned} \text{हल: } 2x^2 - 10x + K = 0 & \Rightarrow 100 - 8K \geq 0 \\ a = 2, b = -10, c = K & +8K \leq +100 \\ \text{वास्तविक मूल के लिए,} & K \leq \frac{100}{8} \times \frac{25}{2} \\ D \geq 0 & K \leq \frac{25}{2} \text{ Ans.} \\ \Rightarrow b^2 - 4ac \geq 0 & \\ \Rightarrow (-10)^2 - 4 \times 2 \times K \geq 0 & \end{aligned}$$

23 → यदि α और β द्विघात बहुपद

$f(x) = ax^2 + bx + c$ के मूल हों तो $\alpha^2 + \beta^2$ का मान निकालें।

$$\begin{aligned} \text{हल: } f(x) &= ax^2 + bx + c \\ a &= a, b = b, c = c \\ \alpha^2 + \beta^2 &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{मूलों का योग } (\alpha + \beta) &= \frac{-b}{a} \\ \text{गुणनफल } (\alpha\beta) &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore \alpha^2 + \beta^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \\ &= \left(\frac{-b}{a}\right)^2 - 2 \times \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} \\ &= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} \text{ Ans.} \end{aligned}$$

24 → $\alpha^2 p^2 x^2 - q^2 = 0$ के मूलों को लिखें।

$$\begin{aligned} \text{हल: } \alpha^2 p^2 x^2 - q^2 &= 0 \\ \alpha^2 p^2 x^2 &= q^2 \\ x^2 &= \frac{q^2}{\alpha^2 p^2} \\ x &= \sqrt{\frac{q^2}{\alpha^2 p^2}} = \pm \frac{q}{\alpha p} \text{ Ans.} \end{aligned}$$

25 → पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से समीकरण $5x^2 - 6x - 2 = 0$ के मूल हल कीजिए।

अध्या: → यदि द्विघात समीकरण $5x^2 - 6x - 2 = 0$ के मूलों का अस्तित्व हो, तो हमें पूर्ण वर्ग बनाने की विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 5x^2 - 6x - 2 &= 0 \\ \text{दोनों ओर 5 से भाग देने पर} & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{5x^2}{5} - \frac{6x}{5} - \frac{2}{5} = \frac{0}{5}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{6x}{5} - \frac{2}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{6}{5}\right)^2 - \left(\frac{6}{5}\right)^2 - \frac{2}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{2}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9}{25} - \frac{2}{5} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{9-10}{25} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{19}{25} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{19}{25} \text{ यह मूल अस्तित्व है।}$$

$$\Rightarrow x - \frac{3}{5} = \sqrt{\frac{19}{25}} = \pm \frac{\sqrt{19}}{5}$$

$$x - \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{19}}{5} \text{ है, तो}$$

$$x = \frac{\sqrt{19}}{5} + \frac{3}{5} = \frac{\sqrt{19}+3}{5} \text{ या } \frac{3+\sqrt{19}}{5} \text{ Ans.}$$

$$\text{फिर } x - \frac{3}{5} = -\frac{\sqrt{19}}{5} \text{ है, तो}$$

$$x = -\frac{\sqrt{19}}{5} + \frac{3}{5} = \frac{-\sqrt{19}+3}{5} \text{ या}$$

$$\frac{3-\sqrt{19}}{5} \text{ Ans.}$$

$$\therefore x = \frac{3+\sqrt{19}}{5}, \frac{3-\sqrt{19}}{5} \text{ Ans.}$$

26 → पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से समीकरण $2x^2 - 7x + 3 = 0$ के मूल हल कीजिए।

अथवा : → यदि द्विघात समीकरण

$2x^2 - 7x + 3 = 0$ के मूलों का अस्तित्व है, तो इसे वर्ग बनाने की विधि द्वारा हल कीजिए।

$$\text{हल: } 2x^2 - 7x + 3 = 0$$

दोनों ओर 2 से भाग देने पर

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{2} - \frac{7x}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{7x}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49+24}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{16} = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{7}{4}\right)^2 = \frac{25}{16} \text{ यह मूलों का अस्तित्व है।}$$

$$x - \frac{7}{4} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \pm \frac{5}{4}$$

$$x - \frac{7}{4} = \frac{5}{4} \text{ है, तो}$$

$$x = \frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{5+7}{4} = \frac{12}{4}$$

$$x = 3 \text{ Ans.}$$

फिर

$$x - \frac{7}{4} = -\frac{5}{4} \text{ है, तो}$$

$$x = -\frac{5}{4} + \frac{7}{4} = \frac{-5+7}{4} = \frac{2}{4}$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ Ans.}$$

$$\therefore x = 3, \frac{1}{2} \text{ Ans.}$$

26(ii) द्विघात समीकरण

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$$

$$\text{हल: } a = 1, b = -2\sqrt{2}, c = 1$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-(-2\sqrt{2}) \pm \sqrt{(2\sqrt{2})^2 - 4 \times 1}}{2 \times 1} \\ x &= \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{8-4}}{2} \\ x &= \frac{2\sqrt{2} \pm 2}{2} \\ &= \frac{2(\sqrt{2} \pm 1)}{2} = \sqrt{2} \pm 1 \end{aligned}$$

27 → पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से समीकरण
- का $2x^2 - 5x + 3 = 0$ के मूल हल
कीजिए।

अथवा:- यदि द्विघात समीकरण $2x^2 - 5x + 3$
+ 3 के मूलों का अस्तित्व है, तो
इन्हें वर्ग बनाने की विधि द्वारा
ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

दोनों ओर 2 से भाग देने पर

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{2} - \frac{5x}{2} + \frac{3}{2} = \frac{0}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 - \frac{5x}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{5}{4})^2 - (\frac{5}{4})^2 + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25}{16} + \frac{3}{2} = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{5}{4})^2 - \frac{25 - 24}{16} = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{5}{4})^2 - \frac{1}{16} = 0$$

$$\Rightarrow (x - \frac{5}{4})^2 = \frac{1}{16} \text{ यह मूलों का अस्तित्व है।}$$

$$x - \frac{5}{4} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \pm \frac{1}{4}$$

$$x - \frac{5}{4} = \frac{1}{4} \text{ हो, तो}$$

$$x = \frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{1+5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

फिर

$$x - \frac{5}{4} = -\frac{1}{4} \text{ हो, तो}$$

$$x = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{-1+5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\therefore x = 1, \frac{3}{2} \text{ Ans.}$$

28 → द्विघात समीकरण की पूर्ण वर्ग
बनाने की विधि से हल करें:-
 $2x^2 + x - 4 = 0$

अथवा:- यदि द्विघात समीकरण $2x^2 + x - 4 = 0$
के मूलों का अस्तित्व है,
तो इन्हें वर्ग बनाने की विधि द्वारा
ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } 2x^2 + x - 4 = 0$$

दोनों ओर 2 से भाग देने पर

$$\Rightarrow \frac{2x^2}{2} + \frac{x}{2} - \frac{4}{2} = \frac{0}{2}$$

$$\Rightarrow x^2 + \frac{x}{2} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 - (\frac{1}{4})^2 - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{1 - 32}{16} = 0$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 - \frac{33}{16} = 0$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 = \frac{33}{16} \text{ यह मूलों का अस्तित्व है।}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{4})^2 = \frac{33}{16}$$

$$\Rightarrow (x + \frac{1}{4}) = \sqrt{\frac{33}{16}} = \pm \frac{\sqrt{33}}{4}$$

$$x + \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{33}}{4} \text{ हो, तो}$$

$$x = \frac{\sqrt{33}}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{33} - 1}{4}$$

$$x + \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{33}}{4} \text{ हो, तो}$$

$$x = -\frac{\sqrt{33}}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{33} + 1}{4}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{33} - 1}{4}, -\frac{\sqrt{33} + 1}{4} \text{ Ans.}$$

29 → गुणनखंड द्वारा समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$
के मूल ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } 2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 3x - 2x + 3$$

$$\Rightarrow x(2x - 3) - 1(2x - 3)$$

$$\begin{array}{l|l} (x-1)(2x-3)=0 & \\ \hline x-1=0 & 2x-3=0 \\ x=1 & 2x=3 \\ & x=\frac{3}{2} \end{array}$$

$$\therefore x = 1, \frac{3}{2}$$

30 → समीकरणों $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ के मूल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } x + \frac{1}{x} &= 3 & x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Rightarrow \frac{x}{1} + \frac{1}{x} &= 3 & x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1} \\ \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{x} &= \frac{3}{1} & x &= \frac{3 \pm \sqrt{9-4}}{2} \\ \Rightarrow x^2 + 1 &= 3x & x &= \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \\ \Rightarrow x^2 - 3x + 1 &= 0 & x &= \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ Ans.} \\ a=1, b=-3, c=1 & & & \\ \text{सूत्र से,} & & & \end{aligned}$$

31 → समीकरण $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ के मूल ज्ञात करें

$$\begin{aligned} \text{हल: } x - \frac{1}{x} &= 3 & x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Rightarrow \frac{x}{1} - \frac{1}{x} &= 3 & x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \\ \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x} &= 3 & x &= \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} \\ \Rightarrow x^2 - 1 &= 3x & x &= \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2} \\ \Rightarrow x^2 - 3x - 1 &= 0 & x &= \frac{3 + \sqrt{13}}{2}, \frac{3 - \sqrt{13}}{2} \text{ Ans.} \\ a=1, b=-3, c=-1 & & & \\ \text{सूत्र से,} & & & \end{aligned}$$

32 → हल करें:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} &= 3, x \neq 0, 2 \\ \text{हल: } \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} &= 3 & a=3, b=-6, c=2 \\ \Rightarrow \frac{x-2-x}{x(x-2)} &= 3 & x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ \Rightarrow \frac{-2}{x^2 - 2x} &= 3 & x &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3} \\ \Rightarrow 3x^2 - 6x &= -2 & x &= \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{6} \\ \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 &= 0 & x &= \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} \end{aligned}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{2 \times 2 \times 3}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \frac{2(3 \pm \sqrt{3})}{6}$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}, x = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}, \frac{3 - \sqrt{3}}{3} \text{ Ans.}$$

33 → हल करें:

$$\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$$

$$\text{हल: } \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{x-7-(x+4)}{(x+4)(x-7)} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{x-7-x-4}{x^2-7x+4x-28} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-11}{x^2-3x-28} = \frac{11}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{x^2-3x-28} = \frac{1}{30}$$

$$\Rightarrow x^2-3x-28 = -30$$

$$\Rightarrow x^2-3x-28+30=0$$

$$\Rightarrow x^2-3x+2=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x-x+2=0$$

$$\Rightarrow x(x-2)-1(x-2)=0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x-1)=0$$

$$x-2=0 \quad x-1=0$$

$$x=2 \quad x=1$$

$$\therefore x=1, 2 \text{ Ans.}$$

34 → हल करें: $\sqrt{13-x^2} = x+5$

$$\text{हल: } \sqrt{13-x^2} = x+5$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\Rightarrow (\sqrt{13-x^2})^2 = (x+5)^2$$

$$\Rightarrow 13-x^2 = x^2+2 \cdot x \cdot 5+5^2$$

$$\Rightarrow 13-x^2 = x^2+10x+25$$

$$\Rightarrow x^2+10x+25+x^2-13=0$$

$$\Rightarrow 2x^2+10x+12=0$$

$$\Rightarrow 2(x^2+5x+6)=0$$

$$\Rightarrow x^2+5x+6=0$$

$$\Rightarrow x^2+3x+2x+6=0$$

$$x(x+3)+2(x+3)=0$$

$$\Rightarrow (x+2)(x+3)=0$$

$$x+2=0 \quad x+3=0$$

$$x=-2 \quad x=-3$$

$$\therefore x=-2, -3 \text{ Ans.}$$

35 → दो लगातार घनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है इसे द्विघात समीकरण के रूप में लिखें।

हल: पहला संख्या = x माना
दूसरा $x+1$ होगा
प्रश्न से,
दोनों का गुणनफल = 306
 $\Rightarrow x \times (x+1) = 306$
 $\Rightarrow x^2 + x - 306 = 0$ Ans.

36 → दो लगातार घनात्मक पूर्णांकों का गुणनफल 306 है। पूर्णांकों को द्विघात समीकरण का उपयोग करके ज्ञात कीजिए।

हल: पहला संख्या = x माना
दूसरा $x+1$ होगा
प्रश्न से,
दोनों का गुणनफल = 306

$$\Rightarrow x \times (x+1) = 306$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 306 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 18x - 17x - 306 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+18) - 17(x+18) = 0$$

$$\Rightarrow (x-17)(x+18) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} x-17=0 & x+18=0 \\ x=17 \text{ संभव} & x=-18 \text{ असंभव} \end{array}$$

हल: पहला संख्या (x) = 17 Ans.

दूसरा $x+1 = 17+1 = 18$ Ans.

37 → यदि दो लगातार प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 30 है, तो उन

संख्याओं को ज्ञात करें।

हल: पहला संख्या = x माना
दूसरा $x+1$ होगा

प्रश्न से,

दोनों का गुणनफल = 30

$$\Rightarrow x \times (x+1) = 30$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 30 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 6x - 5x - 30 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+6) - 5(x+6) = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+6) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} x-5=0 & x+6=0 \\ x=5 \text{ संभव} & x=-6 \text{ असंभव} \end{array}$$

∴ पहली संख्या (x) = 5 Ans.

दूसरी $x+1 = 5+1 = 6$ Ans.

38 → यदि दो लगातार प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 42 है, तो उन संख्याओं को ज्ञात करें।

हल: पहली संख्या = x माना
दूसरी $x+1$ होगा

प्रश्न से,

दोनों का गुणनफल = 42

$$\Rightarrow x \times (x+1) = 42$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 42 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 7x - 6x - 42 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+7) - 6(x+7) = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+7) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} x-6=0 & x+7=0 \\ x=6 \text{ संभव} & x=-7 \text{ असंभव} \end{array}$$

∴ पहली संख्या (x) = 6 Ans.

दूसरी $x+1 = 6+1 = 7$ Ans.

39 → यदि दो लगातार प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 72 है, तो उन संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

हल: पहली संख्या = x माना
दूसरी $x+1$ होगा

प्रश्न से,

दोनों संख्याओं का गुणनफल = 72

$$\Rightarrow x(x+1) = 72$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 72 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 9x - 8x - 72 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+9) - 8(x+9) = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x+9) = 0$$

$$x-8=0 \quad | \quad x+9=0$$

$$x=8 \text{ संभव} \quad | \quad x=-9 \text{ असंभव}$$

∴ पहली संख्या (1) = 8 Ans.

दूसरी $x+1 = 8+1 = 9$ Ans.

40 → यदि दो लगातार प्राकृत संख्याओं का गुणनफल 132 है, तो उन संख्याओं को ज्ञात करें।

हल: पहली संख्या = x माना
दूसरी $x+1$ होगा

प्रश्न से,

दोनों का गुणनफल = 132

$$\Rightarrow x(x+1) = 132$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 132 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x - 11x - 132 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+12) - 11(x+12) = 0$$

$$\Rightarrow (x-11)(x+12) = 0$$

$$x-11=0 \quad | \quad x+12=0$$

$$x=11 \text{ संभव} \quad | \quad x=-12 \text{ असंभव}$$

∴ पहली संख्या (1) = 11 Ans.

दूसरी $x+1 = 11+1 = 12$ Ans.

41 → दो क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके गुणनफल 99 है।

अथवा → दो ऐसे क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके गुणनफल 99 है।

हल: पहली विषम संख्या = x माना

दूसरी $x+2$ होगा

प्रश्न से,

दोनों का गुणनफल = 99

$$\Rightarrow x(x+2) = 99$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 99 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 11x - 9x - 99 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+11) - 9(x+11) = 0$$

$$\Rightarrow (x-9)(x+11) = 0$$

$$x-9=0 \quad | \quad x+11=0$$

$$x=9 \text{ संभव} \quad | \quad x=-11 \text{ असंभव}$$

∴ पहली विषम संख्या (1) = 9 Ans.

दूसरी $x+2 = 9+2 = 11$ Ans.

42 → दो क्रमागत सम धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके गुणनफल 120 है।

हल: पहली सम संख्या = x माना

दूसरी सम संख्या = $x+2$ होगा

प्रश्न से,

दोनों का गुणनफल = 120

$$\Rightarrow x(x+2) = 120$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x - 10x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+12) - 10(x+12) = 0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x+12) = 0$$

$$x-10=0 \quad | \quad x+12=0$$

$$x=10 \text{ संभव} \quad | \quad x=-12 \text{ असंभव}$$

$\therefore$ पहली सम संख्या (x) = 10 Ans.

$$\begin{aligned} \text{दूसरी } &= x+2 \\ &= 10+2=12 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

43 $\rightarrow$ 51 को ऐसे दो भागों में विभक्त करें जिनका गुणनफल 650 हो।

हल: पहला भाग = x माना

दूसरा भाग = (51-x) होगा

प्रश्न से,

दोनों का गुणनफल = 650

$$\Rightarrow x \times (51-x) = 650$$

$$\Rightarrow 51x - x^2 - 650 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 51x - 650 = 0$$

$$\Rightarrow -(x^2 - 51x + 650) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 51x + 650 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 26x - 25x + 650$$

$$\Rightarrow x(x-26) - 25(x-26) = 0$$

$$\Rightarrow (x-25)(x-26) = 0$$

$$x-25=0 \quad | \quad x-26=0$$

$$x=25 \text{ संभव} \quad | \quad x=26 \text{ संभव}$$

$\therefore$ पहला भाग (x) = 25 Ans.

दूसरा = 26 Ans.

44 $\rightarrow$ दो ऐसे क्रमागत विषम धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 290 हो।

हल: पहली विषम संख्या = x माना

दूसरी = x+2 होगा

प्रश्न से,

$\therefore$ वर्गों का योग = 290

$$\Rightarrow (\text{पहली सं.})^2 + (\text{दूसरी सं.})^2 = 290$$

$$\Rightarrow (x)^2 + (x+2)^2 = 290$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = 290$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 - 290 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 286 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + 2x - 143) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 143 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 13x - 11x - 143 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+13) - 11(x+13) = 0$$

$$\Rightarrow (x-11)(x+13) = 0$$

$$x-11=0 \quad | \quad x+13=0$$

$$x=11 \text{ संभव} \quad | \quad x=-13$$

$\therefore$ पहली विषम संख्या (x) = 11 Ans.

दूसरी = x+2 = 11+2 = 13 Ans.

45 $\rightarrow$ दो ऐसे क्रमागत सम धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 244 हो।

हल: पहली सम संख्या = x माना

दूसरी = x+2 होगा

प्रश्न से,

$\therefore$ वर्गों का योग = 244

$$\Rightarrow (\text{पहली सम सं.})^2 + (\text{दूसरी सम सं.})^2 = 244$$

$$\Rightarrow (x)^2 + (x+2)^2 = 244$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = 244$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x + 4 - 244 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 240 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + 2x - 120) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 12x - 10x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+12) - 10(x+12) = 0$$

$$\Rightarrow (x-10)(x+12) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} x-10=0 & x+12=0 \\ x=10 \text{ संभव} & x=-12 \text{ असंभव} \end{array}$$

$\therefore$ पहली संख्या $(x) = 10$ Ans.

दूसरी $y = x+2 = 10+2 = 12$ Ans.

46 $\rightarrow$ दो क्रमागत धनात्मक पूर्णांक ज्ञात कीजिए जिनके वर्गों का योग 365 है।

हल: पहला पूर्णांक $= x$ माना
दूसरा $y = x+1$ होगा

प्रश्न से,

$\therefore$ वर्गों का योग $= 365$

$$\Rightarrow (\text{पहला पूर्णांक})^2 + (\text{दूसरी पूर्णांक})^2 = 365$$

$$\Rightarrow (x)^2 + (x+1)^2 = 365$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2 \cdot x \cdot 1 + 1^2 = 365$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x + 1 - 365 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 364 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 + x - 182) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + x - 182 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 14x - 13x - 182 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+14) - 13(x+14) = 0$$

$$\Rightarrow (x-13)(x+14) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} x-13=0 & x+14=0 \\ x=13 \text{ संभव} & x=-14 \text{ असंभव} \end{array}$$

$\therefore$ पहला पूर्णांक $x = 13$ Ans.

दूसरा $y = x+1 = 13+1 = 14$ Ans.

47 $\rightarrow$ ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए, जिनका योग 27 है और गुणफल 182 है।

हल: पहली संख्या $= x$ माना

दूसरी $y = 27-x$

प्रश्न से,

$$\Rightarrow \text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या} = 182$$

$$\Rightarrow x \times (27-x) = 182$$

$$\Rightarrow 27x - x^2 - 182 = 0$$

$$\Rightarrow -x^2 + 27x - 182 = 0$$

$$\Rightarrow -(x^2 - 27x + 182) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 27x + 182 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x - 13x + 182 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-14) - 13(x-14) = 0$$

$$\Rightarrow (x-13)(x-14) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} x-13=0 & x-14=0 \\ x=13 \text{ संभव} & x=14 \text{ संभव} \end{array}$$

$\therefore$ पहली संख्या $= 13$ Ans.

दूसरी $y = 14$ Ans.

48 $\rightarrow$ किसी संख्या और उसके व्युत्क्रमों का योग $\frac{10}{3}$ है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: संख्या $= x$ माना

x का व्युत्क्रम $= \frac{1}{x}$

प्रश्न से,

$$\therefore x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{x} = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 3 = 10x$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 9x - x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow 3x(x-3) - 1(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow (3x-1)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow 3x-1=0 \quad x-3=0$$

$$3x=1 \quad x=3$$

$$x=\frac{1}{3}$$

$$\therefore x = 3, \frac{1}{3} \text{ Ans.}$$

49 → दो संख्याओं का योग 15 है। यदि उनके व्युत्क्रमों का योग $\frac{3}{10}$ है, तो संख्याएँ मालूम करें।

हल: पहली संख्या = x माना
दूसरी $y = 15 - x$
प्रश्न से,

$$\therefore \text{व्युत्क्रमों का योग} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{15-x} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{15-x+x}{x(15-x)} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{15}{15x-x^2} = \frac{3}{10}$$

$$\Rightarrow 45x - 3x^2 = 150$$

$$\Rightarrow -3x^2 + 45x - 150 = 0$$

$$\Rightarrow -3(x^2 - 15x + 50) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x - 5x + 50 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-10) - 5(x-10) = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x-10) = 0$$

$$x-5=0$$

$$x=5 \text{ संभव}$$

$$x-10=0$$

$$x=10 \text{ संभव}$$

$\therefore$ पहली संख्या = 5 Ans.
दूसरी $y = 10$ Ans.

50 → दो वर्गों के क्षेत्रफलों का योग 468 m^2 है। यदि उनके परिमापों का अंतर 24 m हो, तो दोनों वर्गों की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल: पहला वर्ग का भुजा = $x \text{ m}$ माना
दूसरा $y \text{ m}$ माना
प्रथम शर्त से,

$$\text{क्षेत्र का योग} = 468 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow \text{पहला वर्ग का क्षेत्र} + \text{दूसरा वर्ग का क्षेत्र} = 468$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 468$$

दूसरी शर्त से,

$$\text{परिमापों का अंतर} = 24$$

$$\Rightarrow \text{पहला वर्ग का परिमाप} - \text{दूसरा वर्ग का परिमाप} = 24$$

$$\Rightarrow 4x - 4y = 24$$

$$\Rightarrow x(x-y) = 24$$

$$x-y=6$$

$$x = 6+y \text{ --- (i)}$$

समी. (i) में x का मान रखने पर,

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 468$$

$$\Rightarrow (6+y)^2 + y^2 = 468$$

$$\Rightarrow 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot y + y^2 + y^2 - 468 = 0$$

$$\Rightarrow 36 + 12y + 2y^2 - 468 = 0$$

$$\Rightarrow 2y^2 + 12y - 432 = 0$$

$$\Rightarrow 2(y^2 + 6y - 216) = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y - 216 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 18y - 12y - 216 = 0$$

$$\Rightarrow y(y+18) - 12(y+18) = 0$$

$$\Rightarrow (y-12)(y+18) = 0$$

$$y-12=0$$

$$y=12 \text{ संभव}$$

$$y+18=0$$

$$y=-18 \text{ असंभव}$$

समी. (ii) में y का मान रखने पर

$$x = 6+y = 6+12 = 18$$

$\therefore$ पहला भुजा $(x) = 18 \text{ m}$ Ans.

दूसरा $(y) = 12 \text{ m}$ Ans.

51 → दो संख्याओं के वर्गों का अंतर 180 है। छोटी संख्या का वर्ग छोटी संख्या का आठ गुना है। दोनों संख्याएँ ऋत कीजिए।

हल: छोटी संख्या = x माना

छोटी संख्या का वर्ग = x^2

छोटी संख्या का आठ गुना = $8x$

प्रश्न से,

वर्गों का अंतर = 180

$$\Rightarrow x^2 - 8x = 180$$

$$\Rightarrow x^2 - 8x - 180 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 18x + 10x - 180 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 18) + 10(x - 18) = 0$$

$$\Rightarrow (x + 10)(x - 18) = 0$$

$$x + 10 = 0 \quad | \quad x - 18 = 0$$

$$x = -10 \text{ संभव} \quad | \quad x = 18 \text{ संभव}$$

छोटी संख्या $(x) = 18$

छोटी संख्या = $\sqrt{8x} = \sqrt{8 \times 18}$

$$= \sqrt{144} = \sqrt{12 \times 12} = 12$$

∴ संख्या = 18, 12 या 18, -12 Ans.

52 → तीन लगातार प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग 110 है, तो संख्याएँ निकाले।

हल: पहली संख्या = x माना

दूसरी संख्या = $x + 1$

तीसरी संख्या = $x + 2$

प्रश्न से,

तीनों संख्याओं के वर्गों का योग = 110

$$\Rightarrow (x)^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 110$$

$$\Rightarrow x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 110$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 110$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x + 5 = 110$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x - 105 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + 2x - 35) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 35 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 7x - 5x - 35 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+7) - 5(x+7) = 0$$

$$\Rightarrow (x-5)(x+7) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad | \quad x + 7 = 0$$

$$x = 5 \text{ संभव} \quad | \quad x = -7 \text{ संभव}$$

पहली संख्या $(x) = 5$ Ans.

दूसरी संख्या = $x + 1 = 5 + 1 = 6$ Ans.

तीसरी संख्या = $x + 2 = 5 + 2 = 7$ Ans.

53 → तीन लगातार प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग 29 है, तो संख्याएँ निकाले।

हल: पहली संख्या = x माना

दूसरी संख्या = $x + 1$

तीसरी संख्या = $x + 2$

प्रश्न से,

तीनों संख्याओं के वर्गों का योग = 29

$$\Rightarrow (x)^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 29$$

$$\Rightarrow x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 29$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 + x^2 + 4x + 4 = 29$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x + 5 = 29$$

$$\Rightarrow 3x^2 + 6x - 24 = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 2x - 8 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+4) - 2(x+4) = 0$$

$$\Rightarrow (x-2)(x+4) = 0$$

$$x-2=0$$

$$x+4=0$$

$$x = 2 \text{ संभव} \quad | \quad x = -4 \text{ असंभव}$$

$\therefore$ पहली संख्या $x = 2$ Ans.

दूसरी $1) = x+1 = 2+1 = 3$ Ans.

तीसरी $1) = x+2 = 2+2 = 4$ Ans.

54 $\rightarrow$ एक समकोण त्रिभुज की कैंचार्ड उसकी आधार से 7cm लम्ब है। यदि कर्ण 13cm लम्ब हो, तो अन्य दो भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल: समकोण त्रिभुज में,

आधार $(b) = x$ cm माना

कैंचार्ड $(p) = (x-7)$ cm

कर्ण $(h) = 13$ cm

पाइथागोरस प्रमेय से

$$\Rightarrow p^2 + b^2 = h^2$$

$$\Rightarrow (x-7)^2 + x^2 = 13^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 + x^2 = 13 \times 13$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x + 49 + x^2 = 169$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 14x + 49 - 169 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 14x - 120 = 0$$

$$\Rightarrow 2(x^2 - 7x - 60) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x + 5x - 60 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-12) + 5(x-12) = 0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-12) = 0$$

$$x+5=0$$

$$x = -5 \text{ असंभव}$$

$$x-12=0$$

$$x = 12 \text{ संभव}$$

$\therefore$ आधार $(b) = 12$ cm Ans.

कैंचार्ड $= x-7 = 12-7 = 5$ cm Ans.

55 $\rightarrow$ एक आयताकार खेत का चिह्न उसकी छोटी भुजा से 60मी अधिक लम्बा है। यदि लड़ी भुजा छोटी भुजा से 30मी अधिक हो, तो खेत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

हल: आयताकार खेत में,

छोटी भुजा $= x$ माना

लार्ण $= (x+60)$ cm

लड़ी भुजा $= (x+30)$ cm

ΔOAB में,

$OA(p) = x$

$AB(b) = x+30$

$BO(h) = x+60$

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$\Rightarrow p^2 + b^2 = h^2$$

$$\Rightarrow x^2 + (x+30)^2 = (x+60)^2$$

$$\Rightarrow x^2 + x^2 + 2 \cdot x \cdot 30 + 30^2 = x^2 + 120x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 60x + 900 - x^2 - 120x - 3600 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 60x - 2700 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 90x + 30x - 2700 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-90) + 30(x-90) = 0$$

$$\Rightarrow (x-90)(x+30) = 0$$

$$x-90=0$$

$$x = 90 \text{ संभव}$$

$$x+30=0$$

$$x = -30 \text{ असंभव}$$

$\therefore$ छोटी भुजा $(b) = 90$ m, लड़ी भुजा $= 90+30 = 120$ m

56 → एक रेलगाड़ी एक समान चाल से 360 km की दूरी तय करती है। यदि यह चाल 5 km/h अधिक होती, तो यह उसी यात्रा में 1 घंटा कम समय लेती। रेलगाड़ी की चाल ज्ञात कीजिए।

हल: रेलगाड़ी की चाल = x km/h माना
दूरी = 360 km

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{360}{x} \text{ h}$$

5 km/h अधिक होने पर चाल = $(x+5)$ km/h

$$\text{दूरी} = 360 \text{ km}$$

$$\text{समय} = \frac{\text{दूरी}}{\text{चाल}} = \frac{360}{x+5} \text{ h}$$

$$\text{समय} = 1 \text{ घंटा}$$

प्रश्न से,

$$\Rightarrow \frac{360}{x} - \frac{360}{x+5} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{360(x+5) - 360x}{x(x+5)} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{360x + 1800 - 360x}{x^2 + 5x} = 1$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x = 1800$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x - 1800 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 45x - 40x - 1800 = 0$$

$$\Rightarrow x(x+45) - 40(x+45) = 0$$

$$\Rightarrow (x-40)(x+45) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} x-40=0 & x+45=0 \\ x=40 \text{ संभव} & x=-45 \text{ असंभव} \end{array}$$

$$\therefore \text{रेलगाड़ी की चाल} = 40 \text{ km/h}$$

57 → 3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु (वर्षों में) का व्युत्क्रम और अब से 5 वर्ष पश्चात आयु के व्युत्क्रम का योग $\frac{1}{3}$ है। उसकी वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल: रहमान की वर्तमान आयु = x वर्ष माना

3 वर्ष पूर्व रहमान की आयु = $(x-3)$ वर्ष

5 वर्ष पश्चात $x+5 = (x+5)$ वर्ष

प्रश्न से

$$\text{व्युत्क्रमों का योग} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x+5} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x+5 + x-3}{(x-3)(x+5)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2+5x-3x-15} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+2}{x^2+2x-15} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x^2+2x-15 = 6x+6$$

$$\Rightarrow x^2+2x-6x-15-6=0$$

$$\Rightarrow x^2-4x-21=0$$

$$\Rightarrow x^2-7x+3x-21=0$$

$$\Rightarrow x(x-7)+3(x-7)=0$$

$$\Rightarrow (x-7)(x+3)=0$$

$$\begin{array}{l|l} x-7=0 & x+3=0 \\ x=7 \text{ संभव} & x=-3 \text{ असंभव} \end{array}$$

$$\therefore \text{रहमान की वर्तमान आयु} = 7 \text{ वर्ष आयु}$$

प्रश्नावली 5

1 → A.P.: 10, 7, 4, ... का 30वाँ पद निकालें।

हल: A.P.: 10, 7, 4, ...

$$a = 10, d = 7 - 10 = -3, n = 30$$

$$a_n = ?$$

सूत्र से,

$$a_n = a + (n-1)d$$

$$a_n = 10 + (30-1) \times (-3) = 10 + 29 \times (-3) = 10 - 87 = -77 \text{ Ans.}$$

दूसरी विधि

$$a = 10, d = 7 - 10 = -3$$

$$30\text{वाँ पद} = a + 29d = 10 + 29 \times (-3) = 10 - 87 = -77 \text{ Ans.}$$

2 → समानांतर श्रेणी 1, 4, 7, 10, ... के 18वाँ पद का मान ज्ञात करें।

हल: A.P.: 1, 4, 7, 10, ...

$$a = 1, d = 4 - 1 = 3, n = 18, a_n = ?$$

$$a_n = a + (n-1)d = 1 + (18-1) \times 3 = 1 + 17 \times 3 = 1 + 51 = 52 \text{ Ans.}$$

दूसरी विधि

A.P.: 1, 4, 7, 10, ...

$$a = 1, d = 4 - 1 = 3$$

$$18\text{वाँ पद} = a + 17d$$

$$= 1 + 17 \times 3 = 1 + 51 = 52 \text{ Ans.}$$

3 → A.P. 3, 8, 13, 18, ... का कौन सा

पद 78 है।

अथवा: - समान्तर श्रेणी 3, 8, 13, 18 का कौन सा पद 78 है।

हल: A.P.: 3, 8, 13, 18, ...

$$a = 3, d = 8 - 3 = 5, a_n = 78, n = ?$$

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1 = \frac{78 - 3}{5} + 1$$

$$n = \frac{75}{5} + 1 = 15 + 1 = 16 \text{ Ans.}$$

4 → समान्तर श्रेणी 2, 7, 12, ... का 10वाँ पद ज्ञात करें।

हल: A.P.: 2, 7, 12, ...

$$a = 2, d = 7 - 2 = 5,$$

$$10\text{वाँ पद} = a + 9d = 2 + 9 \times 5 = 2 + 45 = 47 \text{ Ans.}$$

5 → $\frac{4}{5}, x, 2$ किसी A.P. के क्रमागत पद हों, तो x का मान क्या होगा?

$$\begin{aligned} \text{हल: A.P.: } \frac{4}{5}, x, 2 \quad & \Rightarrow 10 - 5x = 5x - 4 \\ \therefore d_1 = d_2 \quad & \Rightarrow -5x - 5x = -4 - 10 \\ \Rightarrow x - \frac{4}{5} = 2 - x \quad & \Rightarrow +10x = +14 \\ \Rightarrow \frac{5x - 4}{5} = 2 - x \quad & x = \frac{14}{10} \\ & x = \frac{7}{5} \text{ Ans.} \end{aligned}$$

6 → दो अंकों वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं?

हल: दो अंकों की छोटी संख्या = 10

$$10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots, 99$$

3 से विभाजित होने वाली छोटी सं. = 12

$$12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 45, 48, 51, 54, 57, 60, 63, 66, 69, 72, 75, 78, 81, 84, 87, 90, 93, 96, 99$$

$\therefore$ A.P.: 12, 15, 18, ..., 99

$$a = 12, d = 15 - 12 = 3, a_n = 99, n = ?$$

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1 = \frac{99 - 12}{3} + 1 = \frac{87}{3} + 1 = 29 + 1 = 30 \text{ Ans.}$$

7 → तीन अंकों वाली कितनी संख्याएँ 3 से विभाज्य हैं?

हल: तीन अंकों की छोटी संख्या = 100

" " " छोटी " = 999

7 से विभाजित होने वाली छोटी सं = 105

7 " " " छोटी सं = 994

∴ A.P.: 105, 112, ..., 994

$a = 105, d = 112 - 105 = 7, a_n = 994$

$n = ?$ सूत्र से,

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1$$

$$n = \frac{994 - 105}{7} + 1 = \frac{889}{7} + 1 = 127 + 1$$

$$n = 127 + 1 = 128 \text{ Ans.}$$

8 → 10 और 250 के बीच में 4 के कितने गुणज हैं?

हल: 10 और 250 के बीच में 4 का पहला गुणज 12 तथा अंतिम गुणज 248 है।

∴ A.P.: 12, 16, 20, ..., 248

$a = 12, d = 16 - 12 = 4, a_n = 248, n = ?$

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1 = \frac{248 - 12}{4} + 1$$

$$n = \frac{236}{4} + 1 = 59 + 1 = 60 \text{ Ans.}$$

9 → A.P. 10, 7, 4, ..., -62 का अंतिम पद

से 11वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: अंतिम पद से,

A.P.: -62, ..., 4, 7, 10

$a = -62, d = 7 - 4 = 3$

11वाँ पद = $a + 10d = -62 + 10 \times 3$

$$= -62 + 30 = -32$$

∴ अंतिम पद से 11वाँ पद = -32 Ans.

10 → A.P. 3, 8, 13, ..., 253 में अंतिम पद से 20वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: अंतिम पद से,

A.P.: 253, ..., 13, 8, 3

$a = 253, d = 8 - 13 = -5$

20वाँ पद = $a + 19d = 253 + 19 \times (-5)$

$$= 253 - 95 = 158$$

∴ अंतिम पद से 20वाँ पद = 158 Ans.

11 → A.P.: 4, 9, 14, ..., 254 का अंत से 10वाँ पद ज्ञात करें।

हल: अंतिम पद से,

A.P.: 254, ..., 14, 9, 4

$a = 254, d = 9 - 14 = -5$

10वाँ पद = $a + 9d = 254 - 9 \times (-5)$

$$= 254 - 45 = 209$$

∴ अंतिम पद से 10वाँ पद = 209 Ans.

12 → A.P.: 3, 15, 27, 39, ... का तीसरा पद उसके 54वाँ पद से 132 अधिक होगा?

हल: A.P.: 3, 15, 27, 39, ...

$a = 3, d = 15 - 3 = 12$

54वाँ पद = $a + 53d = 3 + 53 \times 12$

$$= 3 + 636 = 639$$

132 अधिक होने पर अंतिम पद

$$a_n = 639 + 132 = 771$$

$n = ?$

सूत्र से,

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1 = \frac{771 - 3}{12} + 1$$

$$n = \frac{768}{12} + 1 = 64 + 1 = 65$$

13 → A.P.: 5, 15, 25, 35, का कौन-सा पद उसके 31वें पद से 130 अधिक होगा ?

हल: A.P.: 5, 15, 25, 35,
 $a = 5, d = 15 - 5 = 10$

$$31\text{वाँ पद} = a + 30d = 5 + 30 \times 10 \\ = 5 + 300 = 305$$

130 अधिक होने पर अंतिम पद

$$a_n = 305 + 130 = 435, n = ?$$

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1 = \frac{435 - 5}{10} + 1$$

$$n = \frac{430}{10} + 1 = 43 + 1 \\ = 44\text{वाँ पद Ans.}$$

14 → A.P.: 3, 10, 17, 24, का कौन-सा पद उसके 13वें पद से 84 अधिक होगा ?

हल: A.P.: 3, 10, 17, 24,
 $a = 3, d = 10 - 3 = 7$

$$13\text{वाँ पद} = a + 12d = 3 + 12 \times 7 \\ = 3 + 84 = 87$$

84 अधिक होने पर अंतिम पद

$$a_n = 87 + 84 = 171, n = ?$$

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1 = \frac{171 - 3}{7} + 1$$

$$n = \frac{168}{7} + 1 = 24 + 1 = 25\text{वाँ पद Ans.}$$

15 → उस A.P. का 31वाँ पद ज्ञात कीजिए जिसका 11वाँ पद 38 है और 16वाँ पद 73 है।

हल: 11वाँ पद = 38

$$a + 10d = 38 \text{ --- (i)}$$

$$16\text{वाँ पद} = 73$$

$$a + 15d = 73 \text{ --- (ii)}$$

$$\begin{array}{rcl} a + 10d & = & 38 \text{ --- (i)} \\ a + 15d & = & 73 \text{ --- (ii)} \\ \hline & & +5d = +35 \end{array}$$

$$d = \frac{35}{5} = 7$$

$$d = 7$$

समी. (i) में d का मान रखने पर

$$a + 10d = 38$$

$$a + 10 \times 7 = 38$$

$$a + 70 = 38$$

$$a = 38 - 70$$

$$a = -32$$

$$\begin{aligned} \therefore 31\text{वाँ पद} &= a + 30d \\ &= -32 + 30 \times 7 \\ &= -32 + 210 \\ &= 178 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

16 → एक A.P. में 50 पद हैं, जिसका तीसरा पद 12 है और अंतिम पद 106 है। इसका 29वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल: तीसरा पद = 12

$$a + 2d = 12 \text{ --- (i)}$$

$$\text{अंतिम (50वाँ) पद} = 106$$

$$a + 49d = 106 \text{ --- (ii)}$$

$$a + 2d = 12 \text{ --- (i) घटाने पर}$$

$$a + 49d = 106 \text{ --- (ii)}$$

$$\hline +47d = +94$$

$$d = \frac{94}{47} = 2$$

$$d = 2$$

समी. (i) में d का मान रखने पर

$$a + 2d = 12$$

$$a + 2 \times 2 = 12$$

$$a + 4 = 12$$

$$a = 12 - 4 = 8$$

$$\begin{aligned} \therefore 29\text{वाँ पद} &= a + 28d \\ &= 8 + 28 \times 2 \\ &= 8 + 56 = 64 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

17 → यदि किसी A.P. के तीसरे और नौवें पद का मध्यमः 4 और -8 है, तो इसका कौन-सा पद शून्य होगा ?

हल: तीसरा पद = 4

$$a + 2d = 4 \text{ --- (i)}$$

नीचें पद = -8

$$a + 8d = -8 \text{ --- (ii)}$$

$$a + 2d = 4 \text{ --- (i)}$$

$$a + 8d = -8 \text{ --- (ii)}$$

$$-6d = 12$$

$$d = \frac{12}{-6}$$

$$d = -2$$

समी. (i) में d का मान रखने पर

$$a + 2d = 4$$

$$a + 2 \times (-2) = 4$$

$$a - 4 = 4$$

$$a = 4 + 4 = 8$$

$$d = -2$$

0 भून्य के लिए

$$a_n = 0$$

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1$$

$$n = \frac{0 - 8}{-2} + 1$$

$$n = \frac{-8}{-2} + 1$$

$$n = 4 + 1 = 5$$

∴ 5 वीं पद भून्य होगा Ans.

18 → किसी A.P. का 7 वीं पद 20 और 13 वीं पद 32 है। A.P. ज्ञात कीजिए।

हल: 7 वीं पद = 20

$$a + 6d = 20 \text{ --- (i)}$$

13 वीं पद = 32

$$a + 12d = 32 \text{ --- (ii)}$$

$$a + 6d = 20 \text{ --- (i)}$$

$$a + 12d = 32 \text{ --- (ii)}$$

$$+6d = +12$$

$$d = \frac{12}{6}$$

$$d = 2$$

समी. (i) में d का मान रखने पर

$$a + 6d = 20$$

19 → किसी A.P. का 7 वीं पद -4 और 13 वीं पद -16 है। A.P. ज्ञात करें।

हल: 7 वीं पद = -4

$$a + 6d = -4 \text{ --- (i)}$$

13 वीं पद = -16

$$a + 12d = -16 \text{ --- (ii)}$$

$$a + 6d = -4$$

$$a + 12d = -16$$

$$-6d = 12$$

$$d = \frac{12}{-6}$$

$$d = -2$$

समी. (i) में d का मान रखने पर

$$a + 6d = -4$$

$$a + 6 \times (-2) = -4$$

$$a - 12 = -4$$

$$a = -4 + 12 = 8$$

$$a = -4 + 12 = 8$$

∴ A.P.: 8, 6, 4, 2, ... Ans.

20 → यदि A.P. का 10 वीं पद 52 और 17 वीं पद 13 वीं पद से 20 अधिक है तो A.P. ज्ञात कीजिए।

हल: 10 वीं पद = 52

$$a + 9d = 52 \text{ --- (i)}$$

$$17 \text{ वीं पद} = 13 \text{ वीं पद} + 20$$

$$\Rightarrow a + 16d = a + 12d + 20$$

$$\Rightarrow a + 16d - a - 12d = 20$$

$$\Rightarrow 4d = 20$$

$$d = \frac{20}{4}$$

$$d = 5$$

समी. (i) में d का मान रखने पर

$$a + 9d = 52$$

$$a + 9 \times 5 = 52$$

$$a + 45 = 52$$

$$a = 52 - 45 = 7$$

$$d = 5$$

∴ A.P.: 7, 12, 17, 22, ... Ans.

21 → एक A.P. ज्ञात कीजिए जिसका तीसरा पद 16 है और 7 वीं पद 5 वीं पद से 12 अधिक है।

हल: तीसरा पद = 16

$$a + 2d = 16 \text{ --- (i)}$$

$$7 \text{ वीं पद} = 5 \text{ वीं पद} + 12$$

$$a + 6d = a + 4d + 12$$

$$a + 6d - a - 4d = 12$$

$$2d = 12$$

$$d = \frac{12}{2}$$

$$d = 6$$

हल: 6 से विभाज्य 40 संख्या = 6, 12, 18
 $\dots \dots 6 \times 40$

A.P. 6, 12, 18, $\dots \dots 240$

$$a = 6, d = 12 - 6 = 6, a_n = 240,$$

$$n = 40, S_n = ?$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n) = \frac{40}{2}(6 + 240)$$

$$S_n = 20 \times 246 = 4920 \text{ Ans.}$$

26 → 8 के प्रथम 15 गुणजों का योग
 ज्ञात कीजिए।

हल: 8 के प्रथम 15 गुणज = 8, 16, 24, $\dots$

$$15 \times 8$$

A.P.: 8, 16, 24, $\dots \dots 120$

$$a = 8, d = 16 - 8 = 8, a_n = 120, n = 15$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n) = \frac{15}{2}(8 + 120)$$

$$= \frac{15}{2} \times 128 = 15 \times 64$$

$$= 960 \text{ Ans.}$$

27 → 0 और 50 के बीच की विषम
 संख्याओं का योग ज्ञात कीजिए।

हल: 0 और 50 के बीच की विषम

$$\text{संख्या} = 1, 3, 5, \dots \dots 49$$

A.P. 1, 3, 5, $\dots \dots 49$

$$a = 1, d = 3 - 1 = 2, a_n = 49, S_n = ?$$

$$n = \frac{a_n - a}{d} + 1 \quad \left| \quad S_n = \frac{n}{2}(a + a_n) \right.$$

$$n = \frac{49 - 1}{2} + 1$$

$$n = \frac{48}{2} + 1$$

$$n = 24 + 1 = 25$$

$$S_{25} = \frac{25}{2}(1 + 49)$$

$$S_{25} = \frac{25}{2} \times 50$$

$$S_{25} = 25 \times 25$$

$$S_{25} = 625 \text{ Ans.}$$

28 → उस A.P. के प्रथम 22 पदों का योग
 ज्ञात कीजिए, जिसमें $d = 7$ है और
 22वाँ पद 149 है।

$$\text{हल: } d = 7$$

$$22\text{वाँ पद} = 149$$

$$a + 21d = 149 \text{ --- (i)}$$

समी. (i) में d का मान

रखने पर

$$a + 21 \times 7 = 149$$

$$a + 147 = 149$$

$$a = 149 - 147$$

$$a = 2$$

$$d = 7$$

$$n = 22$$

$$22\text{वाँ पद (अंतिम पद)} a_n = 149$$

$$S_n = ?$$

सूत्र से,

$$S_n = \frac{n}{2}(a + a_n)$$

$$S_n = \frac{22}{2}(2 + 149)$$

$$S_{22} = 11 \times 151$$

$$S_{22} = 1661 \text{ Ans.}$$

29 → उस A.P. के प्रथम 51 पदों का योग
 ज्ञात कीजिए, जिसके दूसरे और
 तीसरे पद क्रमशः 14 और 18 हैं।

$$\text{हल: दूसरा पद} = 14$$

$$a + d = 14 \text{ --- (i)}$$

$$\text{तीसरा पद} = 18$$

$$a + 2d = 18 \text{ --- (ii)}$$

$$a + d = 14 \text{ --- (i)}$$

$$a + 2d = 18 \text{ --- (ii)}$$

$$\underline{a + d = 14}$$

$$d = 4$$

समी. (i) में d का
 मान रखने पर

$$a + d = 14$$

$$a + 4 = 14$$

$$a = 14 - 4$$

$$a = 10$$

$$d = 4$$

$$n = 51$$

$$S_n = ?$$

सूत्र से,

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$S_{51} = \frac{51}{2}[2 \times 10 + (51-1)4]$$

$$S_{51} = \frac{51}{2}(20 + 50 \times 4)$$

$$S_{51} = \frac{51}{2}(20 + 200)$$

$$S_{51} = \frac{51}{2} \times 220$$

$$S_{51} = 51 \times 110$$

$$S_{51} = 5610 \text{ Ans.}$$

समी. (i) में d का मान रखने पर

$$a + 2d = 16$$

$$a + 2 \times 6 = 16$$

$$a + 12 = 16$$

$$a = 16 - 12 = 4$$

$$d = 6$$

$\therefore$ A.P.: 4, 10, 16, 22, ... Ans.

22 $\rightarrow$ किसी A.P. के चौथे और 8 वें पदों का योग 24 है तथा छठे और 10 वें पदों का योग 44 है। इस A.P. के प्रथम तीन पद ज्ञात कीजिए।

हल: प्रथम शर्त से,

$$\text{चौथा पद} + 8 \text{ वें पद} = 24$$

$$\Rightarrow a + 3d + a + 7d = 24$$

$$\Rightarrow 2a + 10d = 24$$

$$\Rightarrow 2(a + 5d) = 24$$

$$a + 5d = \frac{24}{2} = 12$$

$$a + 5d = 12 \text{ --- (i)}$$

दूसरी शर्त से,

छठा और 10 वें पदों का योग = 44

$$\Rightarrow a + 5d + a + 9d = 44$$

$$\Rightarrow 2a + 14d = 44$$

$$\Rightarrow 2(a + 7d) = 44$$

$$a + 7d = \frac{44}{2} = 22$$

$$a + 7d = 22 \text{ --- (ii)}$$

$$a + 5d = 12 \text{ --- (i)}$$

$$a + 7d = 22 \text{ --- (ii)}$$

$$\underline{+ 2d = +10}$$

$$d = \frac{10}{2} = 5$$

समी. (i) में d का मान रखने पर

$$a + 5d = 12 \quad a = 12 - 25$$

$$a + 5 \times 5 = 12 \quad a = -13$$

$$a + 25 = 12 \quad \therefore \text{A.P.: } -13, -8, -3, \dots$$

23 $\rightarrow$ A.P.: 8, 3, -2, ... के प्रथम 22 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: A.P. 8, 3, -2, ...

$$a = 8, d = 3 - 8 = -5, n = 22,$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$S_{22} = \frac{22}{2} [2 \times 8 + (22-1)(-5)]$$

$$S_{22} = 11 [16 + 21 \times (-5)]$$

$$S_{22} = 11 (16 - 105) = 11 \times (-89)$$

$$S_{22} = -979 \text{ Ans.}$$

24 $\rightarrow$ A.P. 2, 7, 12, ... के प्रथम 10 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल: A.P. 2, 7, 12, ...

$$a = 2, d = 7 - 2 = 5, n = 10, S_n =$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

$$S_{10} = \frac{10}{2} [2 \times 2 + (10-1) \times 5]$$

$$S_{10} = 5 [4 + 9 \times 5] = 5 (4 + 45)$$

$$S_{10} = 5 \times 49 = 245 \text{ Ans.}$$

25 $\rightarrow$ ऐसे प्रथम 40 घन पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए, जो 6 से विभाज्य

30 → यदि A.P. में $1 = 28$, $S = 144$ और कुल 9 पद हुआ है तो α ज्ञात कीजिए।

हल: 1 या $\alpha_n = 28$ $144 = \frac{9}{2}(\alpha + 28)$
 S या $S_n = 144 \Rightarrow 9(\alpha + 28) = 144 \times 2$
 $n = 9$
 $\alpha = ?$
 सूत्र से,
 $S_n = \frac{n}{2}(\alpha + \alpha_n)$
 $\alpha + 28 = \frac{144 \times 2}{9}$
 $\alpha + 28 = 16 \times 2$
 $\alpha + 28 = 32$
 $\alpha = 32 - 28 = 4$ Ans.

31 → उस स. श्र. का n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका प्रथम पद α तथा पदान्तर d है।

हल: प्रथम पद $(\alpha) = \alpha$
 पदान्तर $(d) = d$
 पद $(n) = n$
 $S_n = ?$
 सूत्र से,
 $S_n = \frac{n}{2}[2\alpha + (n-1)d]$
 $\therefore n$ पदों का योग $= \frac{n}{2}[2\alpha + (n-1)d]$ Ans.

32 → $1 + 2 + 3 + \dots$ का योग n पदों तक निकालें।

हल: A.P. $1 + 2 + 3 + \dots + n$
 $\alpha = 1, d = 2 - 1 = 1, n = n, S_n = ?$

$S_n = \frac{n}{2}[2\alpha + (n-1)d]$
 $S_n = \frac{n}{2}[2 \times 1 + (n-1) \times 1] = \frac{n}{2}[2 + n - 1]$
 $S_n = \frac{n}{2}(n+1)$ Ans.

33 → $3, 8, 13, 18, \dots$ का कौन-सा पद 18 है?

हल: चौथा पद $= 18$ Ans.

34 → A.P. $24, 21, 18, \dots$ के किन्तु पद लिए जाएँ, ताकि उनका योग 78 हो?

हल: A.P. $24, 21, 18, \dots$
 $\alpha = 24, d = 21 - 24 = -3, S_n = 78$

$n = ?$
 सूत्र से,
 $S_n = \frac{n}{2}[2\alpha + (n-1)d]$
 $\Rightarrow 78 = \frac{n}{2}[2 \times 24 + (n-1) \times (-3)]$

$\Rightarrow 78 = \frac{n}{2}[48 - 3n + 3]$

$\Rightarrow 78 = \frac{n}{2}(51 - 3n)$

$\Rightarrow n(51 - 3n) = 78 \times 2$

$\Rightarrow 51n - 3n^2 = 156$

$\Rightarrow -3n^2 + 51n - 156 = 0$

$\Rightarrow -3(n^2 - 17n + 52) = 0$

$\Rightarrow n^2 - 17n + 52 = 0$

$\Rightarrow n^2 - 13n - 4n + 52 = 0$

$\Rightarrow n(n-13) - 4(n-13) = 0$

$\Rightarrow (n-4)(n-13) = 0$

$n - 4 = 0$ $|$ $n - 13 = 0$

$n = 4$ संभव $|$ $n = 13$ संभव

$\therefore n = 4, 13$ Ans.

35 → दिए गए A.P. $12, 17, 22, 27, \dots$ का पहला पद एवं सार्व अंतर ज्ञात करें।

हल: पहला पद $(\alpha) = 12$ Ans
 सार्व-अंतर $(d) = 17 - 12 = 5$ Ans.

36 → दिए गए A.P. $3, 13, 23, \dots$ का प्रथम पद एवं सार्व अंतर ज्ञात करें।

हल: पहला पद $(\alpha) = 3$ Ans. सार्व-अंतर $(d) = 13 - 3 = 10$ Ans.

प्रश्नावली 7

1 → बिन्दु (2, 3) तथा (4, 1) के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: A(2, 3) तथा B(4, 1)

$$x_1 = 2 \quad | \quad y_1 = 3$$

$$x_2 = 4 \quad | \quad y_2 = 1$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(4 - 2)^2 + (1 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{2^2 + (-2)^2}$$

$$= \sqrt{4 + 4}$$

$$= \sqrt{8}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 2}$$

$$= 2\sqrt{2} \text{ Ans}$$

2 → दो बिन्दुओं (1, 2) और (-3, 5) के बीच की दूरी ज्ञात करें।

हल: A(1, 2) और B(-3, 5)

$$x_1 = 1 \quad | \quad y_1 = 2$$

$$x_2 = -3 \quad | \quad y_2 = 5$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-3 - 1)^2 + (5 - 2)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + 3^2}$$

$$= \sqrt{16 + 9}$$

$$= \sqrt{25}$$

$$= 5 \text{ Ans}$$

3 → बिन्दु (4, 5) तथा (-3, 2) के बीच की दूरी ज्ञात करें।

हल: A(4, 5) तथा B(-3, 2)

$$x_1 = 4 \quad | \quad y_1 = 5$$

$$x_2 = -3 \quad | \quad y_2 = 2$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(-3 - 4)^2 + (2 - 5)^2}$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{49 + 9} = \sqrt{58} \text{ Ans}$$

4 → बिन्दु (a, b) तथा (-a, -b) के बीच की दूरियाँ ज्ञात कीजिए।

हल: बिन्दुओं A और B की दूरी निकालें यदि उनके निर्देशांक

हैं: A(a, b) और B(-a, -b) हैं।

हल: A(a, b) तथा B(-a, -b)

$$x_1 = a \quad | \quad y_1 = b$$

$$x_2 = -a \quad | \quad y_2 = -b$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{(-a - a)^2 + (-b - b)^2}$$

$$= \sqrt{(-2a)^2 + (-2b)^2}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 4b^2} = \sqrt{4(a^2 + b^2)}$$

$$= 2\sqrt{a^2 + b^2} \text{ Ans}$$

5 → मूल बिन्दु से P(6, -6) की दूरी निकालें।

हल: P(6, -6) तथा Q(0, 0) होगा

$$x_1 = 6, x_2 = 0, y_1 = -6, y_2 = 0$$

दूरी सूत्र से,

$$\therefore P \text{ बिन्दु की दूरी} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(0 - 6)^2 + (0 + 6)^2} = \sqrt{6^2 + 6^2}$$

$$= \sqrt{36 + 36} = \sqrt{36(1 + 1)} = 6\sqrt{2} \text{ Ans}$$

6 → किसी तल में P और Q दो बिंदु हैं
निम्नलिखित नियामक क्रमशः (1, -3) और
(4, 1) हैं तो PQ की लम्बाई ज्ञात करें।

हल: P(1, -3), Q(4, 1)

$$x_1 = 1, x_2 = 4, y_1 = -3, y_2 = 1$$

PQ की लम्बाई = ?

सूत्र से,

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(4 - 1)^2 + (1 + 3)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ यूनिट}$$

7 → सिद्ध करें कि मूल बिन्दु से बिन्दु
(a cos α, a sin α) की दूरी a से
सम है।

अथवा: → सिद्ध कि जिस बिन्दुओं
(a cos θ, 0) तथा (0, a sin θ) की दूरी
सदैव a इकाइयाँ होती है, चाहे θ
का मान कुछ भी हो।

हल: A(a cos θ, 0) तथा B(0, a sin θ)

$$x_1 = a \cos \theta, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = a \sin \theta$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(0 - a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta - 0)^2}$$

$$= \sqrt{(a \cos \theta)^2 + (a \sin \theta)^2}$$

$$= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}$$

$$= \sqrt{a^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)}$$

$$= \sqrt{a^2 \times 1} = \sqrt{a^2} = a \text{ Proved.}$$

8 → x-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात
कीजिए जो (2, -5) और (-2, 9) से
सम दूरस्थ है।

हल: x-अक्ष के लिए, $\overline{AP} = \overline{BP}$

$$\text{बिन्दु} = P(x, 0), A(2, -5), B(-2, 9)$$

$$\therefore AP = BP$$

AP के लिए,

$$A(2, -5) \text{ तथा } P(x, 0)$$

$$x_1 = 2, x_2 = x, y_1 = -5, y_2 = 0$$

दूरी सूत्र से,

$$AP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x - 2)^2 + (0 + 5)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 + 5^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 4x + 4 + 25}$$

$$AP = \sqrt{x^2 - 4x + 29}$$

फिर,

BP के लिए

$$B(-2, 9) \text{ तथा } P(x, 0)$$

$$x_1 = -2, x_2 = x, y_1 = 9, y_2 = 0$$

दूरी सूत्र से,

$$BP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$BP = \sqrt{(x + 2)^2 + (0 - 9)^2}$$

$$BP = \sqrt{x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 + 9^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x + 4 + 81}$$

$$= \sqrt{x^2 + 4x + 85}$$

अब से,

$$\therefore AP = BP$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 4x + 29} = \sqrt{x^2 + 4x + 85}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2 - 4x + 29})^2 = (\sqrt{x^2 + 4x + 85})^2$$

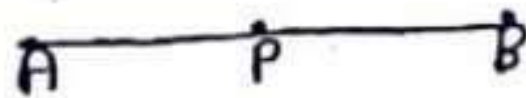
$$\Rightarrow x^2 - 4x + 29 = x^2 + 4x + 85$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x - x^2 - 4x = 85 - 29$$

$$\Rightarrow -8x = 56 \Rightarrow x = -7$$

$$\therefore \text{बिन्दु } (x, 0) = (-7, 0)$$

9 → x-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो (5, 3) और (3, 5) से समदूरस्थ है।

हल: x-अक्ष के लिए, 
 बिन्दु = P(x, 0), A(5, 3), B(3, 5)

$$\therefore AP = BP$$

AP के लिए,
 A(5, 3), P(x, 0)

$$x_1 = 5, x_2 = x, y_1 = 3, y_2 = 0$$

दूरी सूत्र से,

$$AP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x - 5)^2 + (0 - 3)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 + (-3)^2}$$

$$AP = \sqrt{x^2 - 10x + 25 + 9} = \sqrt{x^2 - 10x + 34}$$

फिर,

BP के लिए,

$$B(3, 5), P(x, 0)$$

$$x_1 = 3, x_2 = x, y_1 = 5, y_2 = 0$$

दूरी सूत्र से,

$$BP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(x - 3)^2 + (0 - 5)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 + (-5)^2}$$

$$BP = \sqrt{x^2 - 6x + 9 + 25} = \sqrt{x^2 - 6x + 34}$$

उत्तन से,

$$\therefore AP = BP$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 - 10x + 34} = \sqrt{x^2 - 6x + 34}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\Rightarrow (\sqrt{x^2 - 10x + 34})^2 = (\sqrt{x^2 - 6x + 34})^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x + 34 = x^2 - 6x + 34$$

$$\Rightarrow -10x + 6x = 34 - 34$$

$$-4x = 0$$

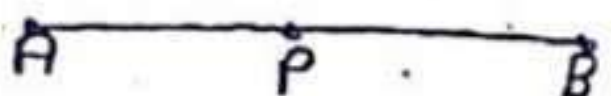
$$x = \frac{0}{-4}$$

$$x = 0$$

$$\therefore \text{बिन्दु } (x, 0) = (0, 0)$$

Ans

10 → y-अक्ष पर वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं (4, 0) और (6, 0) से समदूरस्थ है।

हल: y-अक्ष के लिए, 
 बिन्दु = P(0, y), A(4, 0), B(6, 0)

$$\therefore AP = BP$$

AP के लिए,

$$A(4, 0), P(0, y)$$

$$x_1 = 4, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = y$$

दूरी सूत्र से,

$$AP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AP = \sqrt{(0 - 4)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + y^2}$$

$$AP = \sqrt{16 + y^2}$$

फिर,

BP के लिए,

$$B(6, 0), P(0, y)$$

$$x_1 = 6, x_2 = 0, y_1 = 0, y_2 = y$$

दूरी सूत्र से,

$$BP = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{(0 - 6)^2 + (y - 0)^2}$$

$$BP = \sqrt{(-6)^2 + y^2} = \sqrt{36 + y^2}$$

उत्तन से,

$$AP = BP$$

$$\Rightarrow \sqrt{16 + y^2} = \sqrt{36 + y^2}$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\Rightarrow (\sqrt{16 + y^2})^2 = (\sqrt{36 + y^2})^2$$

$$\Rightarrow 16 + y^2 = 36 + y^2 \text{ Ans}$$

11 → y-अक्ष पर वह मान ज्ञात कीजिए, जिसके लिए बिन्दु (2, -3) और (10, y) के बीच की दूरी 10 मात्रक है।

हल: P(2, -3) और Q(10, y)

$$x_1 = 2, x_2 = 10, y_1 = -3, y_2 = y$$

$$PQ = 10 \text{ मात्रक}$$

दूरी सूत्र से,

$$PQ = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{(10 - 2)^2 + (y + 3)^2} = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{8^2 + y^2 + 2 \cdot y \cdot 3 + 3^2} = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{64 + y^2 + 6y + 9} = 10$$

$$\Rightarrow \sqrt{y^2 + 6y + 73} = 10$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\Rightarrow (\sqrt{y^2 + 6y + 73})^2 = (10)^2$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y + 73 = 100$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y + 73 - 100 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 6y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 9y - 3y - 27 = 0$$

$$\Rightarrow y(y + 9) - 3(y + 9) = 0$$

$$\Rightarrow (y - 3)(y + 9) = 0$$

$$\Rightarrow y - 3 = 0 \mid y + 9 = 0$$

$$y = 3 \mid y = -9$$

$$\therefore y = 3, -9 \text{ Ans}$$

12 → a का मान निकालें यदि $(a, 2)$ और $(3, 4)$ की बीच की दूरी 8 है।

$$\text{हल: } A(a, 2), B(3, 4)$$

$$x_1 = a, x_2 = 3, y_1 = 2, y_2 = 4$$

$$AB = 8 \text{ मात्रक}$$

दूरी सूत्र से,

$$AB = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a - 3)^2 + (2 - 4)^2} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a - 3)^2 + (-2)^2} = 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a - 3)^2 + 4} = 8$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\Rightarrow \sqrt{(a - 3)^2 + 4} = 8 \quad \left| \begin{array}{l} a - 3 = \sqrt{60} \\ a - 3 = \sqrt{2 \times 2 \times 15} \\ a - 3 = \pm 2\sqrt{15} \\ \therefore a = 3 \pm 2\sqrt{15} \text{ Ans} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow (a - 3)^2 + 4 = 64$$

$$\Rightarrow (a - 3)^2 = 64 - 4$$

$$\Rightarrow (a - 3)^2 = 60$$

13 → उस बिंदु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं $(-1, 7)$ और $(4, -3)$ को मिलाने वाले रेखाखंड की $2:3$ के अनुपात में विभाजित करता है।

$$\text{हल: बिंदु} = (-1, 7), (4, -3)$$

$$x_1 = -1, x_2 = 4, y_1 = 7, y_2 = -3$$

$$\text{अनुपात} = 2:3$$

$$m_1 = 2, m_2 = 3$$

$$\text{बिंदु के निर्देशांक} = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$= \left(\frac{2 \times 4 + 3 \times (-1)}{2 + 3}, \frac{2 \times (-3) + 3 \times 7}{2 + 3} \right)$$

$$= \left(\frac{8 - 3}{5}, \frac{-6 + 21}{5} \right) = \left(\frac{5}{5}, \frac{15}{5} \right) = (1, 3) \text{ Ans}$$

14 → उस बिंदु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए, जो बिंदुओं $(2, 3)$ और $(3, -1)$ को मिलाने वाली रेखाखंड की $2:1$ के अनुपात में विभाजित करता है।

$$\text{हल: बिंदु} = (2, 3), (3, -1)$$

$$x_1 = 2, x_2 = 3, y_1 = 3, y_2 = -1$$

$$\text{अनुपात} = 2:1$$

$$m_1 = 2, m_2 = 1$$

$$\text{बिंदु का निर्देशांक} = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$= \left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 2}{2 + 1}, \frac{2 \times (-1) + 1 \times 3}{2 + 1} \right)$$

$$= \left(\frac{6 + 2}{3}, \frac{-2 + 3}{3} \right) = \left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3} \right) \text{ Ans}$$

15 → उस बिन्दु का निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $(-2, 2)$ और $(-3, 3)$ को मिलानेवाली रेखाखंड को 2:3 के अनुपात में विभाजित करती है।

हल: बिन्दु $= (-2, 2), (-3, 3)$

$$x_1 = -2, x_2 = -3, y_1 = 2, y_2 = 3$$

$$\text{अनुपात} = 2:3$$

$$m_1 = 2, m_2 = 3$$

$$\text{बिन्दु का निर्देशांक} = \left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2} \right)$$

$$= \left(\frac{2 \times (-3) + 3 \times (-2)}{2 + 3}, \frac{2 \times 3 + 3 \times 2}{2 + 3} \right)$$

$$= \left(\frac{-6 - 6}{5}, \frac{6 + 6}{5} \right) = \left(\frac{-12}{5}, \frac{12}{5} \right) \text{ Ans}$$

16 → बिन्दुओं $(22, 20)$ और $(0, 16)$ को मिलानेवाली रेखाखंड का मध्य बिन्दु निकालें।

हल: बिन्दु $= A(22, 20), B(0, 16)$

मध्य बिन्दु $= P(x, y)$ माना

$$A(22, 20) \quad P(x, y) \quad B(0, 16)$$

$$x = \frac{22 + 0}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

$$y = \frac{20 + 16}{2} = \frac{36}{2} = 18$$

$$\therefore P(x, y) = (11, 18) \text{ Ans}$$

दूसरी विधि

हल: $A(22, 20), B(0, 16)$

$$\text{मध्य बिन्दु} = \left(\frac{22 + 0}{2}, \frac{20 + 16}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{22}{2}, \frac{36}{2} \right)$$

$$= (11, 18) \text{ Ans}$$

17 → बिन्दु $(8, 10)$ और $(6, 12)$ को मिलाने वाली रेखाखंड के मध्य निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल: $A(8, 10), B(6, 12)$

मध्य निर्देशांक $= P(x, y)$ माना

$$A(8, 10) \quad P(x, y) \quad B(6, 12)$$

$$x = \frac{8 + 6}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$y = \frac{10 + 12}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

$$\therefore P(x, y) = (7, 11) \text{ Ans}$$

दूसरी विधि

हल: $A(8, 10), B(6, 12)$

$$\text{मध्य निर्देशांक} = \left(\frac{8 + 6}{2}, \frac{10 + 12}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{14}{2}, \frac{22}{2} \right) = (7, 11) \text{ Ans}$$

18 → दो बिन्दु $P(2, -2)$ और $Q(-2, 2)$ को मिलानेवाली रेखाखंड के मध्य बिन्दु निकालें।

हल: बिन्दु $= P(2, -2), Q(-2, 2)$

$$\text{मध्य बिन्दु} = \left(\frac{2 + (-2)}{2}, \frac{-2 + 2}{2} \right) = \left(\frac{2 - 2}{2}, \frac{0}{2} \right)$$

$$= \left(\frac{0}{2}, 0 \right) = (0, 0) \text{ Ans}$$

19 → त्रिभुज का केन्द्रक निकालें जिनके शीर्ष $(3, -5), (-7, 4)$ और $(10, -2)$ हैं।

हल: शीर्ष $= (3, -5), (-7, 4), (10, -2)$

$$\text{त्रिभुज का केन्द्रक} = \left(\frac{3 + (-7) + 10}{3}, \frac{-5 + 4 + (-2)}{3} \right)$$

$$= \left(\frac{3 - 7 + 10}{3}, \frac{-5 + 4 - 2}{3} \right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{-3}{3} \right) = (2, -1) \text{ Ans}$$

20 → उस त्रिभुज का केन्द्रक ज्ञात करें जिनके शीर्ष $(3, -5), (-7, 4)$ और $(10, -2)$ हैं।

हल: बिन्दु = $(3, -5), (-7, 4), (10, -2)$

त्रिभुज का केन्द्रक = $\left(\frac{3+(-7)+10}{3}, \frac{-5+4+(-2)}{3}\right)$
 $= \left(\frac{13-7}{3}, \frac{-1-2}{3}\right) = \left(\frac{6}{3}, \frac{-3}{3}\right) = (2, -1)$ Ans

21 → बिन्दुओं $(-3, 10)$ और $(6, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को बिन्दु $(-1, 6)$ किस अनुपात में विभाजित करता है।

हल: बिन्दुओं = $A(-3, 10)$ और $B(6, -8)$

$x_1 = -3, x_2 = 6, y_1 = 10, y_2 = -8$

बिन्दु का निर्देशांक = $P(-1, 6)$

अनुपात = $K:1$ माना

$m_1 = K, m_2 = 1$

बिन्दु का निर्देशांक = $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

$(-1, 6) = \left(\frac{K \times 6 + 1 \times (-3)}{K+1}, \frac{K \times (-8) + 1 \times 10}{K+1}\right)$

$(-1, 6) = \left(\frac{6K-3}{K+1}, \frac{-8K+10}{K+1}\right)$

$\therefore -1 = \frac{6K-3}{K+1} \quad | \quad 7K = 2$

$6K-3 = -K-1$

$6K+K = -1+3$

$K = \frac{2}{7}$

$\therefore$ अनुपात = $2:7$ Ans

फिर,

$6 = \frac{-8K+10}{K+1}$

$14K = 4$

$K = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

$\Rightarrow 6K+6 = -8K+10$

$\Rightarrow 6K+8K = 10-6$

$\therefore$ अनुपात = $2:7$ Ans

22 → बिन्दु $(-4, 6)$, बिन्दुओं $A(-6, 10)$ और $B(3, -8)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड को किस अनुपात में विभाजित करता है।

हल: बिन्दुओं = $A(-6, 10), B(3, -8)$

$x_1 = -6, x_2 = 3, y_1 = 10, y_2 = -8$

बिन्दु का निर्देशांक = $P(-4, 6)$

अनुपात = $K:1$ माना

प्रश्न से,

बिन्दु का निर्देशांक = $\left(\frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1y_2 + m_2y_1}{m_1 + m_2}\right)$

$(-4, 6) = \left(\frac{K \times 3 + 1 \times (-6)}{K+1}, \frac{K \times (-8) + 1 \times 10}{K+1}\right)$

$\Rightarrow (-4, 6) = \left(\frac{3K-6}{K+1}, \frac{-8K+10}{K+1}\right)$

$\therefore -4 = \frac{3K-6}{K+1} \quad | \quad 7K = 2$

$\Rightarrow 3K-6 = -4K-4$

$\Rightarrow 3K+4K = -4+6 \quad | \quad \therefore$ अनुपात = $2:7$ Ans

23 → वह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिन्दुओं $A(3, 6)$ और $(5, 3)$ को

मिलाने वाला रेखाखंड x -अक्ष से विभाजित होता है।

अथवा → बिन्दु $(3, -6)$ और $(5, 3)$ को x -अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है।

हल: बिन्दु = $A(3, -6)$ और $B(5, 3)$

$x_1 = 3, x_2 = 5, y_1 = -6, y_2 = 3$

अनुपात = $K:1$ माना

$m_1 = K, m_2 = 1$

x -अक्ष के लिए,

$\Rightarrow \frac{m_1x_2 + m_2x_1}{m_1 + m_2} = 0$

$\Rightarrow \frac{K \times (-6) + 1 \times 3}{K+1} = 0$

$\Rightarrow \frac{-6K+3}{K+1} = 0$

$\Rightarrow -6K+3 = 0$

$+6K = +3$

$K = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ अनुपात = $1:2$ Ans

24 → बिन्दु $(1, -5)$ और $(-4, 5)$ को x -अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है।

अथवा: → यह अनुपात ज्ञात कीजिए जिसमें बिंदुओं A(1, -5) और B(-4, 5) को मिलाने वाला रेखाखंड x-अक्ष से विभाजित होता है।

हल: बिंदु = A(1, -5), B(-4, 5)

x-अक्ष के लिए,

$$y_1 = -5, y_2 = 5$$

अनुपात = k:1 माना

$$m_1 = k, m_2 = 1 \Rightarrow \frac{-5k+5}{k+1} = 0$$

प्रश्न से,

$$\frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k \times (-5) + 1 \times 5}{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow -5k + 5 = 0$$

$$\Rightarrow +5k = +5$$

$$k = \frac{5}{5} = 1$$

$$\therefore \text{अनुपात} = 1:1$$

Ans

25 → बिंदु (3, 6) और (-5, 3) को y-अक्ष किस अनुपात में विभाजित करता है।

हल: बिंदु = (3, 6) और (-5, 3)

y-अक्ष के लिए,

$$x_1 = 3, x_2 = -5$$

अनुपात = k:1 माना

$$m_1 = k, m_2 = 1$$

प्रश्न से,

$$\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{k \times 3 + 1 \times (-5)}{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{3k-5}{k+1} = 0$$

$$\Rightarrow 3k-5=0$$

$$\Rightarrow 3k=5$$

$$k = \frac{5}{3}$$

$$\therefore \text{अनुपात} = 5:3$$

Ans

26 → उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (1, -1), (-4, 6) और (-3, -5) हैं।

हल: शीर्ष = A(1, -1), B(-4, 6), C(-3, -5)

$$x_1 = 1, x_2 = -4, x_3 = -3$$

$$y_1 = -1, y_2 = 6, y_3 = -5$$

क्षेत्र = ?

सूत्र से,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [1(6 + 5) + (-4)(-5 + 1) + (-3)(-1 - 6)]$$

$$= \frac{1}{2} [1 \times 11 - 4 \times (-4) - 3 \times (-7)]$$

$$= \frac{1}{2} (11 + 16 + 21) = \frac{1}{2} \times 48 = 24$$

27 → त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (2, 3), (-1, 0), (2, -4) हैं।

हल: शीर्ष = A(2, 3), B(-1, 0), C(2, -4)

$$x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 2$$

$$y_1 = 3, y_2 = 0, y_3 = -4$$

क्षेत्र = ?

सूत्र से,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [2(0 + 4) + (-1)(-4 - 3) + 2(3 - 0)]$$

$$= \frac{1}{2} [2 \times 4 - 1 \times (-7) + 2 \times 3]$$

$$= \frac{1}{2} (8 + 7 + 6) = \frac{21}{2} = 10.5$$

$$= 10.5 \text{ वर्ग मात्रक Ans}$$

28 → त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष (-5, -1), (3, -5), (5, 2) हैं।

हल: शीर्ष = A(-5, -1), B(3, -5), C(5, 2)

$$x_1 = -5, x_2 = 3, x_3 = 5$$

$$y_1 = -1, y_2 = -5, y_3 = 2$$

क्षेत्र = ?

सूत्र से,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [-5(-5 - 2) + 3(2 + 1) + 5(-1 + 5)]$$

$$= \frac{1}{2} [-5 \times (-7) + 3 \times 3 + 5 \times 4]$$

$$= \frac{1}{2} (35 + 9 + 20) = \frac{1}{2} \times 64 = 32$$

= 32 वर्ग मात्रक Ans

29 → उस त्रिभुज का क्षेत्रफल निकालें
जिनके शीर्षों के नियामक क्रमशः
(5, 2), (-5, -1) और (3, 5) हैं।

हल: शीर्ष = A(5, 2), B(-5, -1), C(3, 5)

$$x_1 = 5, x_2 = -5, x_3 = 3$$

$$y_1 = 2, y_2 = -1, y_3 = 5$$

क्षे० = ?

सूत्र से,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [5(-1-5) + (-5)(5-2) + 3(2+1)]$$

$$= \frac{1}{2} [5 \times (-6) - 5 \times 3 + 3 \times 3]$$

$$= \frac{1}{2} (-30 - 15 + 9) = \frac{1}{2} \times -36 = -18$$

= -18 वर्ग मात्रक Ans

30 → यदि ABC के शीर्षों के नियामक
क्रमशः (-5, 7), (-4, -5) और (4, 5)
हैं तो ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: शीर्ष = A(-5, 7), B(-4, -5), C(4, 5)

$$x_1 = -5, x_2 = -4, x_3 = 4$$

$$y_1 = 7, y_2 = -5, y_3 = 5$$

क्षे० = ?

सूत्र से,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [-5(-5-5) + (-4)(5-7) + 4(7+5)]$$

$$= \frac{1}{2} [-5 \times (-10) - 4 \times (-2) + 4 \times 12]$$

$$= \frac{1}{2} (50 + 8 + 48) = \frac{106}{2} = 53 \text{ वर्ग मात्रक } \underline{\text{Ans}}$$

31 → K का मान ज्ञात कीजिए, यदि बिन्दु
A(2, 3), B(4, K) और C(6, -3) संरेखी हैं।

हल: बिन्दु = A(2, 3), B(4, K), C(6, -3)

$$x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6$$

$$y_1 = 3, y_2 = K, y_3 = -3$$

संरेखी के लिए,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

$$\Rightarrow 2(K+3) + 4(-3-3) + 6(3-K) = 0 \times 2$$

$$\Rightarrow 2K + 6 + 4 \times (-6) + 18 - 6K = 0$$

$$\Rightarrow -4K + 24 - 24 = 0$$

$$\Rightarrow K = \frac{0}{-4} = 0$$

$\therefore K = 0$ Ans

32 → K का मान ज्ञात कीजिए, यदि
तीनों बिन्दु (8, 1), (K, -4) तथा
(2, -5) संरेखी हैं।

हल: बिन्दु = A(8, 1), B(K, -4), C(2, -5)

$$x_1 = 8, x_2 = K, x_3 = 2$$

$$y_1 = 1, y_2 = -4, y_3 = -5$$

संरेखी के लिए,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

$$\Rightarrow 8(-4+5) + K(-5-1) + 2(1+4) = 0 \times 2$$

$$\Rightarrow 8 \times 1 + K \times (-6) + 2 \times 5 = 0$$

$$\Rightarrow 8 - 6K + 10 = 0$$

$$\Rightarrow -6K + 18 = 0$$

$$\Rightarrow +6K = +18$$

$$K = \frac{18}{6} = 3$$

$\therefore K = 3$ Ans

33 → K का मान ज्ञात कीजिए, यदि
तीनों बिन्दु (4, 6), (8, K), (12, -6)
संरेखी हैं।

हल: बिन्दु = A(4, 6), B(8, K), C(12, -6)

$$x_1 = 4, x_2 = 8, x_3 = 12$$

$$y_1 = 6, y_2 = K, y_3 = -6$$

संरेखी के लिए,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

$$\Rightarrow 4(K + 6) + 8(-6 - 6) + 12(6 - K) = 0 \times 2$$

$$\Rightarrow 4K + 24 + 8 \times (-12) + 72 - 12K = 0$$

$$\Rightarrow -12K + 4K + 96 - 96 = 0$$

$$\Rightarrow -8K = 0$$

$$K = \frac{0}{-8} = 0$$

$$K = 0 \text{ Ans}$$

34 → सिद्ध करें कि बिन्दु (-1.5, 3), (6, -2) एवं (-3, 4) संरेखित हैं।

हल: बिन्दु = A(-1.5, 3), B(6, -2), C(-3, 4)

$$x_1 = -1.5, x_2 = 6, x_3 = -3$$

$$y_1 = 3, y_2 = -2, y_3 = 4$$

संरेखी के लिए,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)] = 0$$

$$\Rightarrow -1.5(-2 - 4) + 6(4 - 3) + (-3)(3 + 2) = 0 \times 2$$

$$\Rightarrow -1.5 \times (-6) + 6 \times 1 - 3 \times 5 = 0$$

$$\Rightarrow 9.0 + 6 - 15 = 0$$

$$\Rightarrow 15 - 15 = 0$$

$$\Rightarrow 0 = 0 \text{ Proved.}$$

प्रश्नावली 8

1 → यदि $\tan A = \frac{4}{3}$, तो कोण A के

अन्य त्रिकोणमितीय अनुपात ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } \tan A = \frac{4}{3} = \frac{p}{b}$$

$$p = 4$$

$$b = 3$$

$$h = \sqrt{p^2 + b^2}$$

$$h = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$h = \sqrt{16 + 9}$$

$$h = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \cot A = \frac{b}{p} = \frac{3}{4} \text{ Ans}$$

$$\sin A = \frac{p}{h} = \frac{4}{5} \text{ Ans}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{h}{p} = \frac{5}{4} \text{ Ans}$$

$$\cos A = \frac{b}{h} = \frac{3}{5} \text{ Ans}$$

$$\sec A = \frac{h}{b} = \frac{5}{3} \text{ Ans}$$

2 → यदि $\tan A = \frac{3}{4}$, तो $\sin A$ और $\cos A$ के मान परिकल्पित करें।

$$\text{हल: } \tan A = \frac{3}{4} = \frac{p}{b}$$

$$p = 3$$

$$b = 4$$

$$h = \sqrt{p^2 + b^2}$$

$$h = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$h = \sqrt{9 + 16}$$

$$h = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \sin A = \frac{p}{h} = \frac{3}{5} \text{ Ans}$$

$$\cos A = \frac{b}{h} = \frac{4}{5} \text{ Ans}$$

3 → यदि $\tan \theta = \frac{5}{12}$, तो $\sin \theta + \cos \theta$ का मान निकालें।

$$\text{हल: } \tan \theta = \frac{5}{12} = \frac{p}{b}$$

$$p = 5$$

$$b = 12$$

$$h = \sqrt{p^2 + b^2}$$

$$h = \sqrt{5^2 + 12^2}$$

$$h = \sqrt{25 + 144}$$

$$h = \sqrt{169} = 13$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta$$

$$= \frac{p}{h} + \frac{b}{h}$$

$$= \frac{5}{13} + \frac{12}{13}$$

$$= \frac{5 + 12}{13}$$

$$= \frac{17}{13} \text{ Ans}$$

4 → यदि $\tan \theta = 0.75$ तो $\sin \theta$ और $\operatorname{cosec} \theta$ का मान निकालें।

$$\text{हल: } \tan \theta = 0.75 \text{ या } \frac{75}{100} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{p}{b}$$

$$p = 3$$

$$b = 4$$

$$h = \sqrt{p^2 + b^2}$$

$$h = \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$h = \sqrt{9 + 16}$$

$$h = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{p}{h} = \frac{3}{5} \text{ Ans}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{h}{p} = \frac{5}{3} \text{ Ans}$$

5 → यदि $15 \cot A = 8$ हो तो $\sin A$, $\sec A$ और $\cos A$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल: } 15 \cot A = 8$$

$$\cot A = \frac{8}{15} = \frac{b}{p}$$

$$b = 8$$

$$p = 15$$

$$h = \sqrt{p^2 + b^2}$$

$$h = \sqrt{15^2 + 8^2}$$

$$h = \sqrt{225 + 64}$$

$$h = \sqrt{289} = 17$$

$$\therefore \sin A = \frac{p}{h} = \frac{15}{17} \text{ Ans}$$

$$\sec A = \frac{h}{b} = \frac{17}{8} \text{ Ans}$$

$$\cos A = \frac{b}{h} = \frac{8}{17} \text{ Ans}$$

6 → यदि $\cot A = \frac{3}{4}$, तो $\sin A$ और $\cos A$ का मान परिकल्पित कीजिए।

$$\text{हल: } \cot A = \frac{3}{4} = \frac{b}{p}$$

$$b = 3$$

$$p = 4$$

$$h = \sqrt{p^2 + b^2}$$

$$h = \sqrt{4^2 + 3^2}$$

$$h = \sqrt{16 + 9}$$

$$h = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \sin A = \frac{p}{h} = \frac{4}{5} \text{ Ans}$$

$$\cos A = \frac{b}{h} = \frac{3}{5} \text{ Ans}$$

7 → यदि $\sin A = \frac{3}{4}$, तो $\cos A$ और $\tan A$ का मान परिकल्पित कीजिए।

$$\text{हल: } \sin A = \frac{3}{4} = \frac{p}{h}$$

$$p = 3$$

$$h = 4$$

$$b = \sqrt{h^2 - p^2}$$

$$b = \sqrt{4^2 - 3^2}$$

$$b = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$$

$$\therefore \cos A = \frac{b}{h} = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ Ans}$$

$$\tan A = \frac{p}{b} = \frac{3}{\sqrt{7}} \text{ Ans}$$

8 → यदि $\sin \theta = \frac{12}{13}$ हो, तो $\cos \theta$ और $\tan \theta$ का मान ज्ञात करें।

$$\text{हल: } \sin \theta = \frac{12}{13} = \frac{p}{h}$$

$$b = \sqrt{h^2 - p^2}$$

$$b = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25}$$

$$b = 5$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{b}{h} = \frac{5}{13} \text{ Ans}$$

$$\tan \theta = \frac{p}{b} = \frac{12}{5} \text{ Ans}$$

9 → यदि $\sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta$ तो $\sin \theta + \cos \theta$ का मान निकालें।

$$\text{हल: } \sin \theta = \sqrt{3} \cos \theta$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sqrt{3}$$

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{p}{b}$$

$$h = \sqrt{p^2 + b^2}$$

$$h = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$$

$$h = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4}$$

$$h = 2$$

$$\therefore \sin \theta + \cos \theta$$

$$= \frac{p}{h} + \frac{b}{h}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2} \text{ Ans}$$

10 → यदि $\sec \theta = \frac{13}{12}$, हो, तो अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपात परिकल्पित कीजिए।

$$\text{हल: } \sec \theta = \frac{13}{12} = \frac{h}{b}$$

$$p = \sqrt{h^2 - b^2}$$

$$p = \sqrt{13^2 - 12^2}$$

$$p = \sqrt{169 - 144}$$

$$p = \sqrt{25} = 5$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{p}{h} = \frac{5}{13} \text{ Ans}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{h}{p} = \frac{13}{5} \text{ Ans}$$

$$\tan \theta = \frac{p}{b} = \frac{5}{12} \text{ Ans}$$

$$\cot \theta = \frac{b}{p} = \frac{12}{5} \text{ Ans}$$

$$\cos \theta = \frac{b}{h} = \frac{12}{13} \text{ Ans}$$

11 → यदि $\sec A = \frac{25}{7}$, तो $\tan A + \cot A$ का मान ज्ञात करें।

$$\text{हल: } \sec A = \frac{25}{7} = \frac{h}{b}$$

$$p = \sqrt{h^2 - b^2}$$

$$p = \sqrt{25^2 - 7^2}$$

$$p = \sqrt{625 - 49}$$

$$p = \sqrt{576} = 24$$

$$\therefore \tan A + \cot A$$

$$= \frac{p}{b} + \frac{b}{p}$$

$$= \frac{24}{7} + \frac{7}{24}$$

$$= \frac{576 + 49}{168} = \frac{625}{168} \text{ Ans}$$

12 → $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \sin^2 60^\circ \\ = 2 \times 1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ = 2 \times 1 \times 1 = 2 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

13 → $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } \sin 60^\circ \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cos 60^\circ \\ = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3+1}{4} = \frac{4}{4} = 1 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

14 → यदि $x = 180^\circ$ हो तो मान ज्ञात करें।

$$\begin{aligned} \cos^2 0^\circ + \tan^3 \frac{x}{4} + \sin^4 \frac{x}{4} \\ \text{हल: } \cos^2 0^\circ + \tan^3 \frac{x}{4} + \sin^4 \frac{x}{4} \\ = \cos^2 0^\circ + \tan^3 \frac{180^\circ}{4} + \sin^4 \frac{180^\circ}{4} \\ = \cos^2 0^\circ + \tan^3 45^\circ + \sin^4 45^\circ \\ = 1^2 + 1^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \\ = 1 + 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\ = 2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &= \frac{2}{1} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{8+1}{4} \\ &= \frac{9}{4} \text{ Ans.} \end{aligned}$$

15 → $2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ$ का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } 2 \tan^2 45^\circ + \cos^2 60^\circ + \sin^2 60^\circ \\ = 2 \times 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \\ = \frac{2}{1} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8+1+3}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

16 → सिद्ध करें:

$$\begin{aligned} \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ &= 0 \\ \text{हल: } \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ &= 0 \\ \text{L.H.S} &= \cos 38^\circ \cos 52^\circ - \sin 38^\circ \sin 52^\circ \\ &= \cos(90^\circ - 52^\circ) \cos 52^\circ - \sin(90^\circ - 52^\circ) \sin 52^\circ \\ &= \sin 52^\circ \cos 52^\circ - \cos 52^\circ \sin 52^\circ \\ \text{R.H.S} &= 0 \text{ Proved.} \end{aligned}$$

17 → सिद्ध करें: $\tan 9^\circ \tan 27^\circ = \cot 63^\circ \cot 81^\circ$

$$\begin{aligned} \text{हल: } \tan 9^\circ \tan 27^\circ &= \cot 63^\circ \cot 81^\circ \\ \text{L.H.S} &= \tan 9^\circ \tan 27^\circ \\ &= \tan(90^\circ - 81^\circ) \tan(90^\circ - 63^\circ) \\ &= \cot 81^\circ \cot 63^\circ \\ \text{R.H.S} &= \cot 63^\circ \cot 81^\circ \text{ Proved.} \end{aligned}$$

18 → सिद्ध करें: $\tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ = 1$

$$\begin{aligned} \text{हल: } \tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ &= 1 \\ \text{L.H.S} &= \tan 48^\circ \tan 23^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ \\ &= \tan(90^\circ - 42^\circ) \tan(90^\circ - 67^\circ) \tan 42^\circ \tan 67^\circ \\ &= \cot 42^\circ \cot 67^\circ \tan 42^\circ \tan 67^\circ \\ &= \frac{1}{\tan 42^\circ} \times \frac{1}{\tan 67^\circ} \times \tan 42^\circ \tan 67^\circ \\ &= 1 \times 1 \\ \text{R.H.S} &= 1 \text{ Proved.} \end{aligned}$$

19 → $\cot 85^\circ + \cos 75^\circ$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: } \cot 85^\circ + \cos 75^\circ \\ = \cot(90^\circ - 5^\circ) + \cos(90^\circ - 15^\circ) \\ = \tan 5^\circ + \sin 15^\circ \text{ Ans.} \end{aligned}$$

20 → $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$ को 0° और 45° के बीच के कोणों के त्रिकोणमितीय अनुपातों के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल: $\sin 67^\circ + \cos 75^\circ$
 $= \sin(90^\circ - 23^\circ) + \cos(90^\circ - 15^\circ)$
 $= \cos 23^\circ + \sin 15^\circ$ Ans.

21 → यदि $\sin(A-B) = \frac{1}{2}$, $\cos(A+B) = \frac{1}{2}$,
 $0^\circ < A+B \leq 90^\circ$, $A > B$, तो A और B
 ज्ञात कीजिए।

हल: प्रथम शर्त से,

$\Rightarrow \sin(A-B) = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \sin(A-B) = \sin 30^\circ$
 $A-B = 30^\circ \text{ --- (i)}$

दूसरी शर्त से,

$\Rightarrow \cos(A+B) = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow \cos(A+B) = \cos 60^\circ$
 $\Rightarrow A+B = 60^\circ \text{ --- (ii)}$

$A-B = 30^\circ \text{ --- (i)}$
 $A+B = 60^\circ \text{ --- (ii)}$
 $+$
 $2A = 90^\circ$
 $A = \frac{90^\circ}{2}$
 $A = 45^\circ$

समी. (ii) में A का मान रखने पर

$A+B = 60^\circ$
 $45^\circ + B = 60^\circ$
 $B = 60^\circ - 45^\circ$
 $B = 15^\circ$

$\left\{ \begin{array}{l} A = 45^\circ \\ B = 15^\circ \end{array} \right\}$ Ans.

22 → यदि $\tan(A+B) = \sqrt{3}$ और $\tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $0^\circ < A+B \leq 90^\circ$; $A > B$ तो
 A और B का मान ज्ञात कीजिए।

हल: प्रथम शर्त से,

$\Rightarrow \tan(A+B) = \sqrt{3}$
 $\Rightarrow \tan(A+B) = \tan 60^\circ$
 $\Rightarrow A+B = 60^\circ \text{ --- (i)}$

दूसरी शर्त से,

$\Rightarrow \tan(A-B) = \frac{1}{\sqrt{3}}$
 $\Rightarrow \tan(A-B) = \tan 30^\circ$
 $\Rightarrow A-B = 30^\circ \text{ --- (ii)}$

$A+B = 60^\circ \text{ --- (i)}$ जोड़ने पर

$A-B = 30^\circ \text{ --- (ii)}$
 $+$
 $2A = 90^\circ$

$A = \frac{90^\circ}{2}$
 $A = 45^\circ$

समी. (i) में A का मान रखने पर

$A+B = 60^\circ$
 $45^\circ + B = 60^\circ$
 $B = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$

$\left\{ \begin{array}{l} A = 45^\circ \\ B = 15^\circ \end{array} \right\}$ Ans.

23 → यदि $\sin 3A = \cos(A-26^\circ)$ हो, जहाँ,
 $3A$ एक न्यून कोण है तो A का
 मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\sin 3A = \cos(A-26^\circ)$
 $\Rightarrow \cos(90^\circ - 3A) = \cos(A-26^\circ)$
 $\Rightarrow 90^\circ - 3A = A-26^\circ$
 $\Rightarrow -3A - A = -26^\circ - 90^\circ$
 $\Rightarrow -4A = -116^\circ$

$A = \frac{116^\circ}{4}$

$A = 29^\circ$ Ans.

24 → यदि $\sec 4A = \operatorname{cosec}(A - 20^\circ)$, जहाँ $4A$ एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल: } \sec 4A &= \operatorname{cosec}(A - 20^\circ) \\ \Rightarrow \operatorname{cosec}(90^\circ - 4A) &= \operatorname{cosec}(A - 20^\circ) \\ \Rightarrow 90^\circ - 4A &= A - 20^\circ \\ \Rightarrow -4A - A &= -20^\circ - 90^\circ \\ \Rightarrow +5A &= +110^\circ \\ A &= \frac{110^\circ}{5} = 22^\circ \\ A &= 22^\circ \text{ Ans.}\end{aligned}$$

25 → यदि $\tan 2A = \cot(A - 18^\circ)$, जहाँ $2A$ एक न्यून कोण है, तो A का मान ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल: } \tan 2A &= \cot(A - 18^\circ) \\ \Rightarrow \cot(90^\circ - 2A) &= \cot(A - 18^\circ) \\ \Rightarrow 90^\circ - 2A &= A - 18^\circ \\ \Rightarrow -2A - A &= -18^\circ - 90^\circ \\ \Rightarrow +3A &= +108^\circ \\ A &= \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ \\ A &= 36^\circ \text{ Ans.}\end{aligned}$$

26 → यदि $\tan A = \cot B$, तो सिद्ध कीजिए कि $A + B = 90^\circ$

$$\begin{aligned}\text{हल: } \tan A &= \cot B \\ \Rightarrow \tan A &= \tan(90^\circ - B) \\ \Rightarrow A &= 90^\circ - B \\ \Rightarrow A + B &= 90^\circ \text{ Proved.}\end{aligned}$$

दूसरी विधि

$$\begin{aligned}\text{हल: } \tan A &= \cot B \\ \Rightarrow \cot(90^\circ - A) &= \cot B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 90^\circ - A &= B \\ \Rightarrow 90^\circ &= B + A \\ \therefore A + B &= 90^\circ \text{ Proved.}\end{aligned}$$

27 → अनुपातों $\cos A$, $\tan A$ और $\sec A$ को $\sin A$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल: } \sin A \text{ के पदों में,} \\ \operatorname{cosec} A &= \frac{1}{\sin A} = \frac{h}{p} \\ b &= \sqrt{h^2 - p^2} \\ b &= \sqrt{1^2 - \sin^2 A} \\ b &= \sqrt{1 - \sin^2 A} \\ \therefore \cos A &= \frac{b}{h} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2 A}}{1} \\ \cos A &= \sqrt{1 - \sin^2 A} \text{ Ans.} \\ \tan A &= \frac{p}{b} = \frac{\sin A}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \text{ Ans.} \\ \sec A &= \frac{h}{b} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 A}} \text{ Ans.}\end{aligned}$$

28 → त्रिकोणमितीय अनुपातों $\sin A$, $\sec A$ और $\tan A$ को $\cot A$ के पदों में व्यक्त कीजिए।

$$\begin{aligned}\text{हल: } \cot A \text{ के पदों में,} \\ \tan A &= \frac{1}{\cot A} = \frac{p}{b} \\ h &= \sqrt{p^2 + b^2} \\ h &= \sqrt{1^2 + \cot^2 A} \\ h &= \sqrt{1 + \cot^2 A} \\ \therefore \sin A &= \frac{p}{h} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 A}} \text{ Ans.} \\ \sec A &= \frac{h}{b} = \frac{\sqrt{1 + \cot^2 A}}{\cot A} \text{ Ans.} \\ \tan A &= \frac{p}{b} = \frac{1}{\cot A} \text{ Ans.}\end{aligned}$$

29 → $\angle A$ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को $\sec A$ के पदों में लिखिए।

$$\text{हल: } \cos A = \frac{1}{\sec A} = \frac{b}{h}$$

$$P = \sqrt{h^2 - b^2}$$

$$P = \sqrt{\sec^2 A - 1} = \sqrt{\sec^2 A - 1}$$

$$\therefore \sin A = \frac{P}{h} = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{\sec A} \text{ Ans.}$$

$$\operatorname{cosec} A = \frac{h}{P} = \frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A - 1}} \text{ Ans.}$$

$$\tan A = \frac{P}{b} = \frac{\sqrt{\sec^2 A - 1}}{1} = \sqrt{\sec^2 A - 1} \text{ Ans.}$$

$$\cot A = \frac{b}{P} = \frac{1}{\sqrt{\sec^2 A - 1}} \text{ Ans.}$$

$$\cos A = \frac{b}{h} = \frac{1}{\sec A} \text{ Ans.}$$

30 → सिद्ध कीजिए कि $\sec A(1 - \sin A)$

$$(\sec A + \tan A) = 1$$

$$\text{हल: } \sec A(1 - \sin A)(\sec A + \tan A) = 1$$

$$\text{L.H.S} = \sec A(1 - \sin A)(\sec A + \tan A)$$

$$= \frac{1}{\cos A} \times (1 - \sin A) \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A} \right)$$

$$= \frac{(1 - \sin A)}{\cos A} \times \frac{(1 + \sin A)}{\cos A}$$

$$= \frac{1^2 - \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{1 - \sin^2 A}{\cos^2 A} = \frac{\cos^2 A}{\cos^2 A} = 1$$

$$\text{R.H.S} = 1 \text{ Proved.}$$

$$31 \rightarrow \text{सिद्ध करें: } \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = 1$$

$$\text{हल: } \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta} = 1$$

$$\text{L.H.S} = \frac{\sin^4 \theta - \cos^4 \theta}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(\sin^2 \theta)^2 - (\cos^2 \theta)^2}{\sin^2 \theta - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}{(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)}$$

$$= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta$$

$$\text{R.H.S} = 1 \text{ Proved.}$$

32 → सिद्ध करें:

$$(\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\text{हल: } (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2 = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}$$

$$\text{L.S.H} = (\operatorname{cosec} \theta - \cot \theta)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\sin \theta} - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)^2$$

$$= \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} = \frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{(1 - \cos \theta)^2}{1^2 - \cos^2 \theta} = \frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \text{ Proved.}$$

33 → सिद्ध करें:

$$(\sec \theta - \tan \theta)^2 = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$\text{हल: } (\sec \theta - \tan \theta)^2 = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta}$$

$$\text{L.H.S} = (\sec \theta - \tan \theta)^2$$

$$= \left(\frac{1}{\cos \theta} - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right)^2 = \left(\frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} \right)^2$$

$$= \frac{(1 - \sin \theta)^2}{\cos^2 \theta} = \frac{(1 - \sin \theta)^2}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{(1 - \sin \theta)^2}{1^2 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{(1 - \sin \theta)(1 - \sin \theta)}{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)} \quad \text{R.H.S} = \frac{1 - \sin \theta}{1 + \sin \theta} \text{ proved.}$$

34 → सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

हल: $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

L.H.S = $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$ में $\sqrt{1+\sin A}$ से उपर-नीचे गुणा करने पर

$$= \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} \times \frac{\sqrt{1+\sin A}}{\sqrt{1+\sin A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1^2 - \sin^2 A}} = \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1 - \sin^2 A}} = \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1+\sin A}{\cos A} = \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$$

R.H.S = $\sec A + \tan A$ Proved.

35 → सिद्ध कीजिए कि

$$\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \operatorname{cosec} A - \cot A$$

हल: $\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} = \operatorname{cosec} A - \cot A$

L.H.S = $\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ में $\sqrt{1-\cos A}$ से उपर-नीचे गुणा करने पर

$$= \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} \times \frac{\sqrt{1-\cos A}}{\sqrt{1-\cos A}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1-\cos A)^2}{1^2 - \cos^2 A}} = \sqrt{\frac{(1-\cos A)^2}{1 - \cos^2 A}} = \sqrt{\frac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{1}{\sin A} - \frac{\cos A}{\sin A}$$

R.H.S = $\operatorname{cosec} A - \cot A$ Proved.

36 → सिद्ध करें कि $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2 \sec A$

अथवा:- सिद्ध करें कि

$$\frac{1+\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{1+\sin A} = 2 \sec A$$

हल: $\frac{1+\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{1+\sin A} = 2 \sec A$

L.H.S = $\frac{1+\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{1+\sin A}$

$$= \frac{(1+\sin A)^2 + \cos^2 A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot \sin A + \sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{1 + 2\sin A + 1}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{2 + 2\sin A}{\cos A(1+\sin A)}$$

$$= \frac{2(1+\sin A)}{\cos A(1+\sin A)} = \frac{2}{\cos A}$$

R.H.S = $2 \sec A$ Proved.

37 → $2 \cos^2 \theta + \frac{2}{1+\cos^2 \theta}$ का मान ज्ञात करें।

हल: $2 \cos^2 \theta + \frac{2}{1+\cos^2 \theta}$

$$= 2 \cos^2 \theta + \frac{2}{\operatorname{cosec}^2 \theta} [\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta]$$

$$= 2 \cos^2 \theta + 2 \sin^2 \theta$$

$$= 2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = 2 \times 1 = 2 \text{ Ans.}$$

38 → सिद्ध कीजिए: $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

हल: $\frac{1+\sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$

L.H.S = $\frac{1+\sec A}{\sec A}$

$$= (1+\sec A) \div \sec A$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\cos A}\right) \div \frac{1}{\cos A}$$

$$= \frac{\cos A + 1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1}$$

$$= \frac{1+\cos A}{1} \times \frac{1-\cos A}{1-\cos A}$$

$$= \frac{1^2 - \cos^2 A}{1-\cos A}$$

$$= \frac{1-\cos^2 A}{1-\cos A}$$

R.H.S = $\frac{\sin^2 A}{1-\cos A}$ Proved.

दूसरी विधि

$$\text{हल: } \frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A} = \frac{1 - \cos^2 A}{1 - \cos A} \\ &= \frac{1^2 - \cos^2 A}{1 - \cos A} = \frac{(1 + \cos A)(1 - \cos A)}{(1 - \cos A)} \end{aligned}$$

$$= 1 + \cos A = \frac{1}{1} + \frac{1}{\sec A} = \frac{\sec A + 1}{\sec A}$$

$$\text{L.H.S.} = \frac{1 + \sec A}{\sec A} \text{ Proved.}$$

39 → सिद्ध करें:

$$\tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta$$

$$\text{हल: } \tan \theta + \cot \theta = \sec \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta$$

$$\text{L.H.S} = \tan \theta + \cot \theta$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos \theta \sin \theta} = \frac{1}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\text{R.H.S} = \sec \theta \times \operatorname{cosec} \theta \text{ Proved.}$$

40 → $\sin A + \cos A = 1$ को सिद्ध करें:

$$\cos A - \sin A = 1$$

अथवा: → यदि $\sin A + \cos A = 1$ को सिद्ध

$$\text{करें कि } \cos A - \sin A = \pm 1$$

$$\text{हल: } \sin A + \cos A = 1$$

दोनों ओर वर्ग करने पर

$$\Rightarrow (\sin A + \cos A)^2 = 1^2$$

$$\Rightarrow \sin^2 A + 2\sin A \cos A + \cos^2 A = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A \cos A = 1$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin A \cos A = 1$$

$$\Rightarrow 2\sin A \cos A = 1 - 1$$

$$\Rightarrow 2\sin A \cos A = 0$$

$$\therefore (\cos A - \sin A)^2 = \cos^2 A + \sin^2 A - 2\sin A \cos A$$

$$\Rightarrow (\cos A - \sin A)^2 = 1 - 0$$

$$\Rightarrow (\cos A - \sin A)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \cos A - \sin A = \pm 1$$

$$\Rightarrow \cos A - \sin A = \pm 1 \text{ Proved.}$$

41 → सिद्ध करें:

$$(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 =$$

$$7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$\text{हल: } (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 =$$

$$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$$

$$\text{L.H.S} = (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$$

$$= \sin^2 A + 2\sin A \operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec}^2 A + \cos^2 A$$

$$+ 2\cos A \sec A + \sec^2 A$$

$$= \sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A \times \frac{1}{\sin A} + \operatorname{cosec}^2 A$$

$$+ 2\cos A \times \frac{1}{\cos A} + \sec^2 A$$

$$= 1 + 2 + 1 + \cot^2 A + 2 + 1 + \tan^2 A$$

$$\text{R.H.S} = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A \text{ Proved.}$$

42 → सिद्ध करें कि $\frac{1 + \cot^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cot^2 A$

$$\text{हल: } \frac{1 + \cot^2 A}{1 + \tan^2 A} = \cot^2 A$$

$$\text{L.H.S} = \frac{1 + \cot^2 A}{1 + \tan^2 A} = \frac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A}$$

$$= \operatorname{cosec}^2 A \div \sec^2 A = \frac{1}{\sin^2 A} \div \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$= \frac{1}{\sin^2 A} \times \frac{\cos^2 A}{1} = \frac{\cos^2 A}{\sin^2 A}$$

$$\text{R.H.S} = \cot^2 A \text{ Proved.}$$

43 → सिद्ध करें कि $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \tan^2 A$

हल: $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \tan^2 A$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A} \\ &= \sec^2 A \div \operatorname{cosec}^2 A = \frac{1}{\cos^2 A} \div \frac{1}{\sin^2 A} \\ &= \frac{1}{\cos^2 A} \times \frac{\sin^2 A}{1} = \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \end{aligned}$$

R.H.S = $\tan^2 A$ Proved.

44 → यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अंतर्गत कोण हों, तो दिखाइए कि

$$\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$$

हल: $\sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}$

Δ में तीनों कोणों का योग = 180°

$$\Rightarrow A + B + C = 180^\circ$$

दोनों ओर 2 से भाग देने पर

$$\Rightarrow \frac{A+B+C}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

दोनों ओर sin से गुणा करने पर

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \sin\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cos\frac{A}{2} \text{ Proved.}$$

45 → यदि A, B और C त्रिभुज ABC के अंतर्गत कोण हों, तो दिखाइए कि

$$\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$$

हल: $\tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cot\frac{A}{2}$

Δ में तीनों कोणों का योग = 180°

$$\Rightarrow A + B + C = 180^\circ$$

दोनों ओर 2 से भाग देने पर

$$\Rightarrow \frac{A+B+C}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} + \frac{B+C}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2}$$

दोनों ओर tan से गुणा करने पर

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \tan\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \tan\left(\frac{B+C}{2}\right) = \cot\frac{A}{2} \text{ Proved.}$$

प्रश्नावली: 9.1

1 → ΔPQR में, जिसका कोण Q समकोण है, PQ = 3 cm और PR = 6 cm हैं। ∠QPR और ∠PRQ ज्ञात कीजिए।

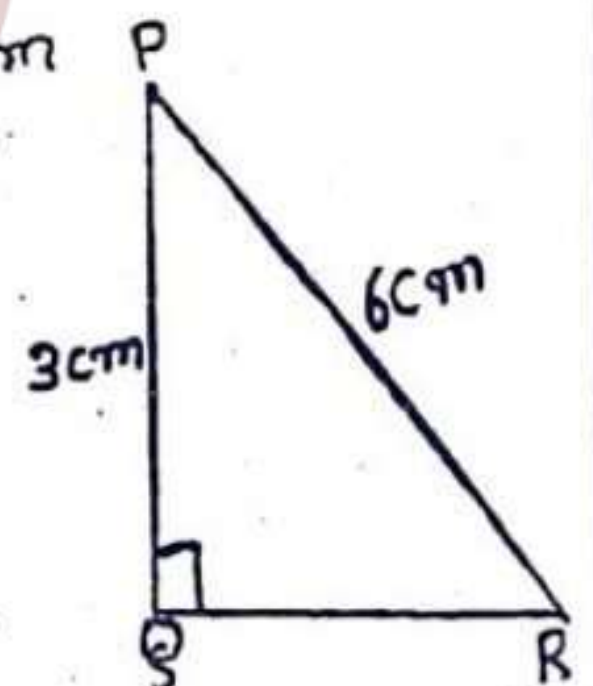
हल: PQ = 3 cm, PR = 6 cm

$$\therefore \sin R = \frac{PQ}{PR} = \frac{3}{6}$$

$$\sin R = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \angle PRQ = 30^\circ \text{ Ans.}$$

$$\angle QPR = 60^\circ \text{ Ans.}$$



2 → ΔABC में जिसका कोण B समकोण है, AB = 5 cm और ∠ACB = 30° । भुजाओं BC और AC की लंबाई ज्ञात करें।

हल: ΔABC में,

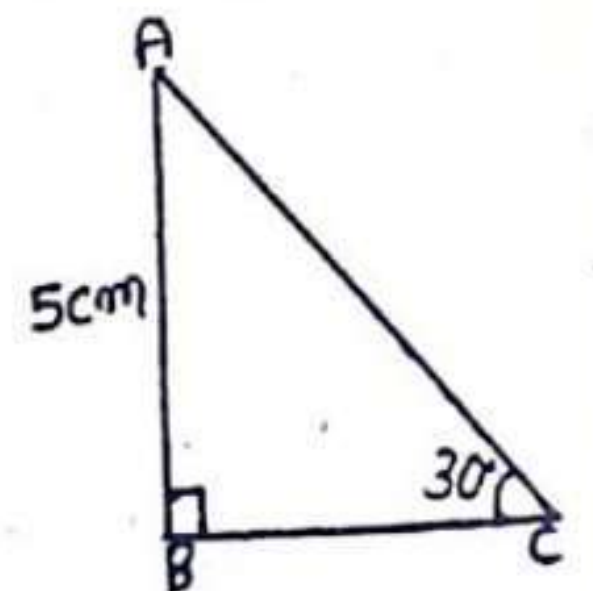
$$\angle B = 90^\circ$$

$$\angle ACB = 30^\circ$$

$$AB(p) = 5 \text{ cm}$$

$$BC(b) = ?$$

$$AC(h) = ?$$



$$\theta = 30^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{p}{b}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{5}{b}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{5}{b}$$

$$b = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{p^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2}$$

$$h = \sqrt{25 + 75} = \sqrt{100}$$

$$h = 10 \text{ cm}$$

$$\therefore BC \text{ की लंबाई} = 5\sqrt{3} \text{ cm Ans.}$$

$$AC \text{ की लंबाई} = 10 \text{ cm Ans.}$$

3 → भूमि के एक बिन्दु से जो मीनार के पाद बिन्दु से 50m की दूरी पर है तथा मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि AB एक मीनार है जिसकी ऊँचाई x m है और दूरी 50m तथा उन्नयन कोण 45° है।

$\triangle ABC$ में,

$$AB = x \text{ m}$$

$$BC = 50 \text{ m}$$

$$\theta = 45^\circ$$

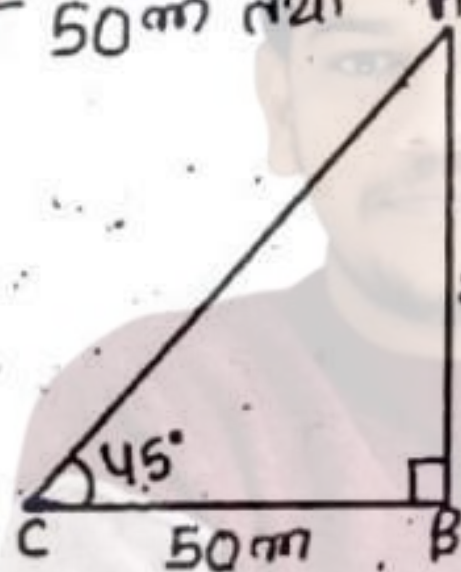
$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{x}{50}$$

$$x = 50 \text{ m}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{x}{50}$$

$$\therefore \text{मीनार की ऊँचाई} = 50 \text{ m Ans.}$$



4 → भूमि के एक बिन्दु से जो मीनार के पाद बिन्दु से 60m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि AB मीनार है जिसकी ऊँचाई x m है और दूरी 60m तथा उन्नयन कोण 60° है।

$\triangle ABC$ में,

$$AB = x \text{ m}$$

$$BC = 60 \text{ m}$$

$$\theta = 60^\circ$$

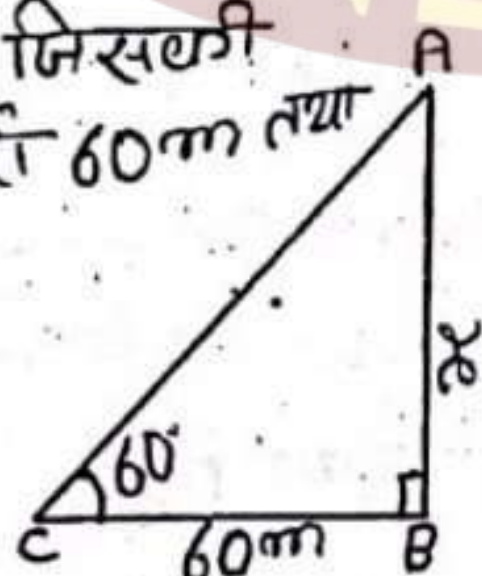
$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{60}$$

$$\sqrt{3} = \frac{x}{60}$$

$$x = 60\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{मीनार की ऊँचाई} = 60\sqrt{3} \text{ m Ans.}$$



5 → भूमि के एक बिन्दु से जो मीनार के पाद बिन्दु से 30m की दूरी पर है, मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि आयुति ABC में AB मीनार है जिसकी ऊँचाई x m है और दूरी 30m तथा उन्नयन कोण 30° है।

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$BC = 30 \text{ m}$$

$$AB = x \text{ m}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{30}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{30}$$

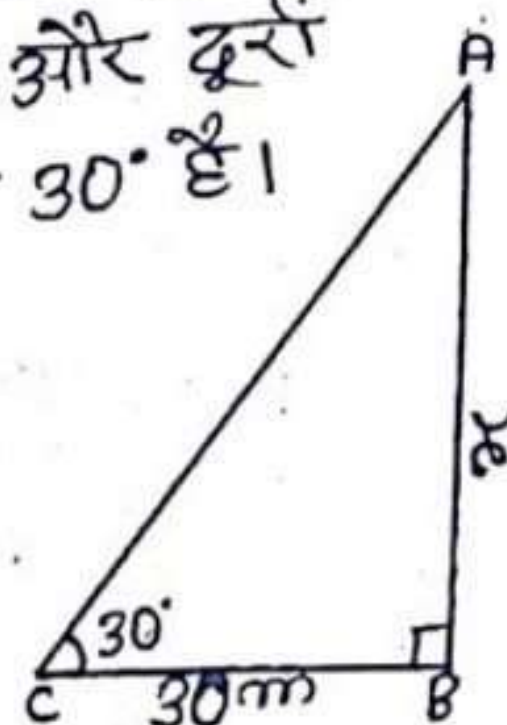
$$\Rightarrow \sqrt{3}x = 30$$

$$x = \frac{30}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{30\sqrt{3}}{3}$$

$$x = 10\sqrt{3} \text{ m}$$

$$\therefore \text{मीनार की ऊँचाई} = 10\sqrt{3} \text{ m Ans.}$$



6 → एक मीनार के पाद से 20m दूर स्थित एक बिन्दु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि आयुति ABC में AB मीनार है जिसकी ऊँचाई x m है और दूरी 20m तथा उन्नयन कोण 30° है।

समकोण $\triangle ABC$ में,

$$BC = 20 \text{ m}$$

$$AB = x \text{ m}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

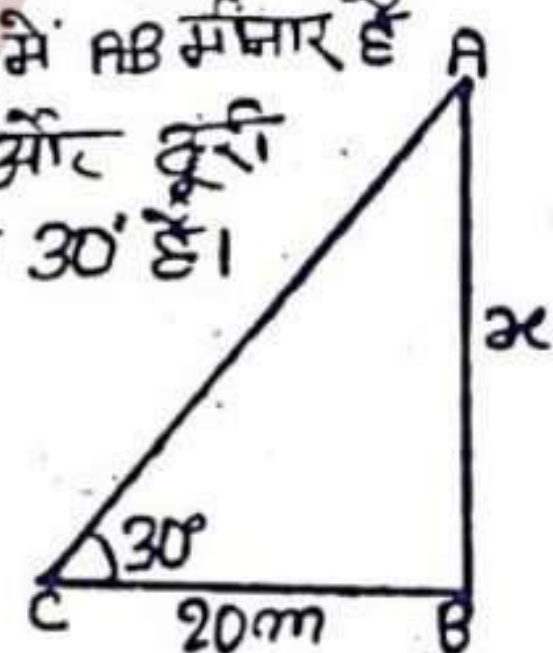
$$\tan 30^\circ = \frac{x}{20}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{20}$$

$$\sqrt{3}x = 20$$

$$x = \frac{20}{\sqrt{3}} = \frac{20}{1.732} = 11.54$$

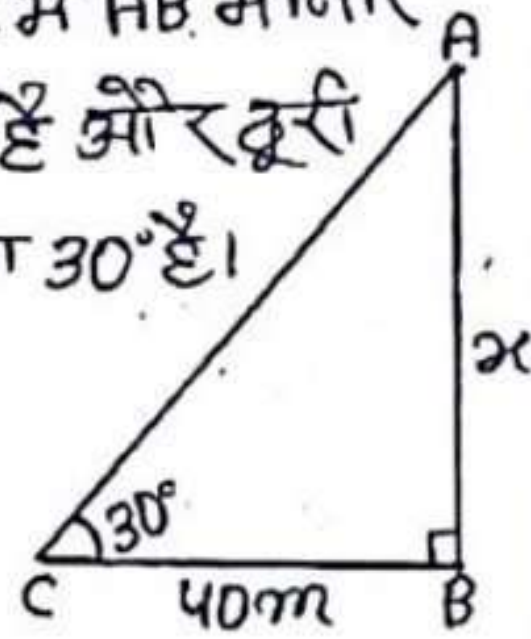
$$\therefore \text{मीनार की ऊँ.} = 11.54 \text{ m Ans.}$$



7 → भूमि के एक बिन्दु से जो मीनार के पाद बिन्दु से 40m की दूरी पर है तथा मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि आयुति ABC में AB मीनार है जिसकी ऊँचाई x म है और दूरी 40 म तथा उन्नयन कोण 30° है।

ΔABC में,
 $BC = 40$ म
 $AB = x$ म
 $\theta = 30^\circ$



$$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{40}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{40}$$

$$\sqrt{3}x = 40$$

$$x = \frac{40}{\sqrt{3}} = \frac{40 \times 23.09}{1.732}$$

$$x = 23.09 \text{ म}$$

$\therefore$ मीनार की ऊँ. = 23.09 म
 Ans.

8 $\rightarrow$ आँधी आने से एक पेड़ टूट जाता है और टूटा हुआ भाग इस तरह मुड़ जाता है कि पेड़ का शिखर जमीन की छूने लगता है और इसके साथ 30° का कोण बनाता है। पेड़ के पड़ा-छिन्दु की दूरी, जहाँ पेड़ का शिखर जमीन की छूता है, 8 म है। पेड़ की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC में,
 $BC = 8$ म
 $\theta = 30^\circ$
 $\tan \theta = \frac{AB}{BC}$
 $\tan 30^\circ = \frac{AB}{8}$
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{AB}{8}$
 $\sqrt{3}AB = 8$
 $AB = \frac{8}{\sqrt{3}}$ — (i)



फिर,

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\frac{8}{\sqrt{3}}}{AC}$$

$$AC = \frac{8}{\sqrt{3}} \times 2 = \frac{16}{\sqrt{3}} \text{ — (ii)}$$

$\therefore$ पेड़ की ऊँचाई = $AB + AC$

$$= \frac{8}{\sqrt{3}} + \frac{16}{\sqrt{3}} = \frac{8+16}{\sqrt{3}} = \frac{24}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{24}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{24\sqrt{3}}{3} = 8\sqrt{3} \text{ म Ans.}$$

9 $\rightarrow$ 6 मीटर ऊँचाई वाले एक खम्बे पर स्तंभ की छाया की लम्बाई 4 म है उसी समय एक मीनार की छाया की लम्बाई 28 म है तो मीनार की ऊँचाई निकालें।

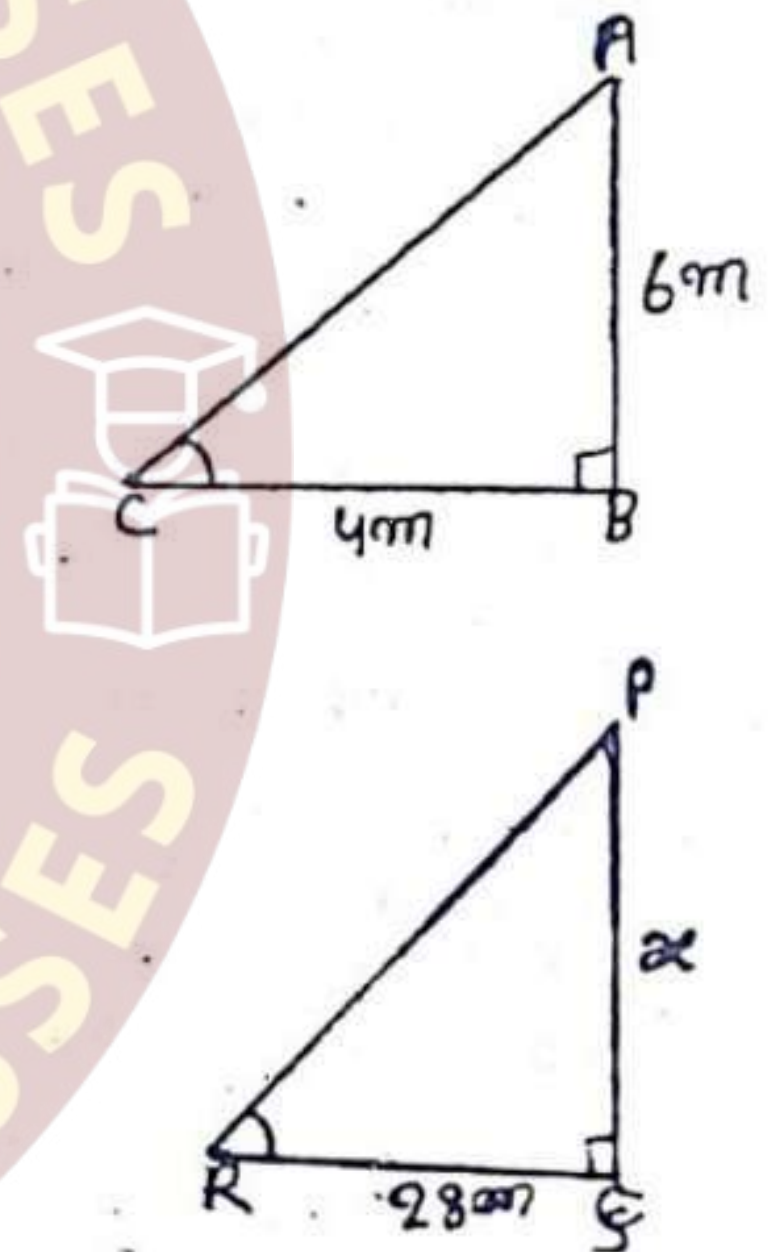
हल: माना कि पहला आयुति ABC तथा दूसरा आयुति PQR है जिसमें मीनार की ऊँचाई x म है।

ΔABC में,
 $AB = 6$ म
 $BC = 4$ म

फिर,
 ΔPQR में,
 $PQ = x$ म
 $QR = 28$ म

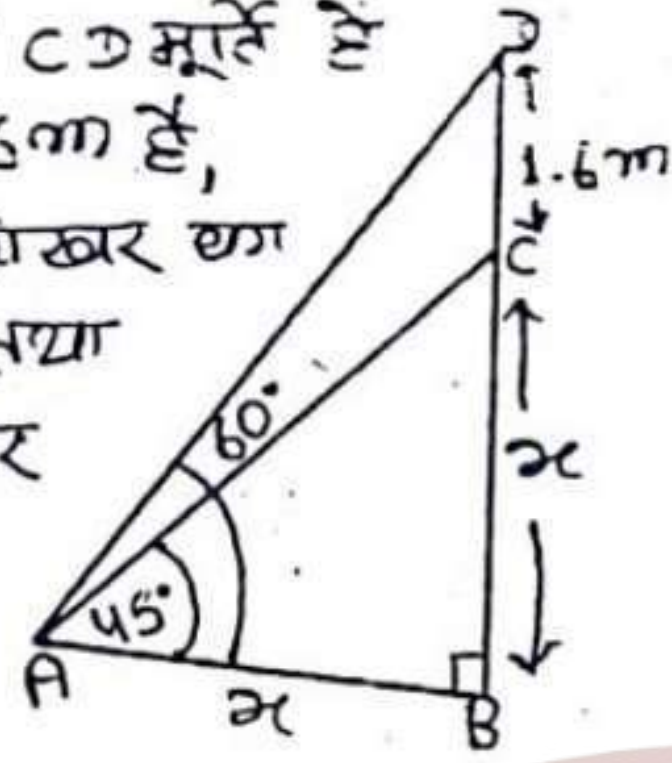
प्रश्न से,
 $\angle ABC = \angle PQR$
 $\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{PQ}{QR}$
 $\Rightarrow \frac{6}{4} = \frac{x}{28}$
 $\Rightarrow \frac{6}{1} = \frac{x}{7}$
 $x = 42$ म

$\therefore$ मीनार की ऊँचाई = 42 म Ans.



10 $\rightarrow$ एक पेडस्टल के शिखर पर एक 1.6 म ऊँची मूर्ति लगी है। भूमि के एक छिन्दु से मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° है और उसी छिन्दु से पेडस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है। पेडस्टल की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि BC पैस्टल है जिसकी ऊँचाई x m तथा CD मूर्ति है जिसकी ऊँचाई 1.6 m है, जिसमें मूर्ति के शिखर का उन्नयन कोण 60° तथा पैस्टल के शिखर का उन्नयन कोण 45° है।



$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ में,} \\ BC &= x \text{ m} \\ \theta &= 45^\circ \\ \tan \theta &= \frac{BC}{AB} \\ \tan 45^\circ &= \frac{x}{AB} \\ \Rightarrow 1 &= \frac{x}{AB} \\ AB &= x \end{aligned}$$

फिर,

$$\begin{aligned} \Delta ABD \text{ में} \\ AB &= x \\ CD &= 1.6 \\ BC &= x \\ BD &= BC + CD \\ BD &= x + 1.6 \\ \theta &= 60^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{BD}{AB} \\ \tan 60^\circ &= \frac{x+1.6}{x} \\ \Rightarrow \sqrt{3} &= \frac{x+1.6}{x} \\ \Rightarrow \sqrt{3}x &= x+1.6 \\ \Rightarrow \sqrt{3}x - x &= 1.6 \\ \Rightarrow x(\sqrt{3}-1) &= 1.6 \end{aligned}$$

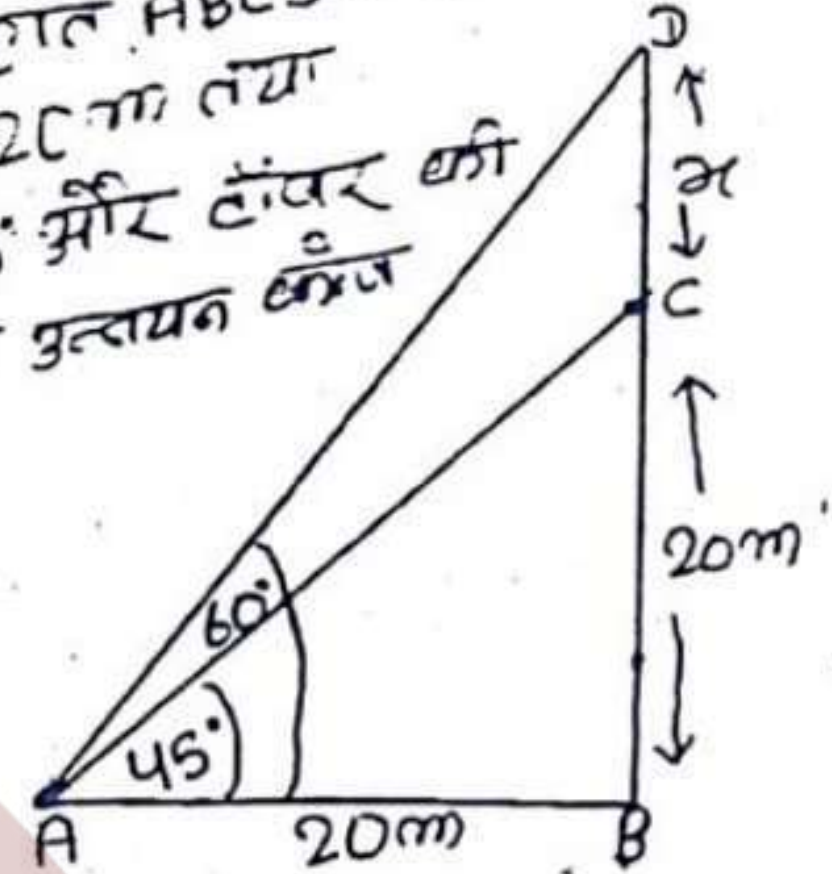
$$\begin{aligned} x &= \frac{1.6}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1} \\ x &= \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3})^2-1^2} \\ x &= \frac{1.6(\sqrt{3}+1)}{3-1} \\ x &= \frac{0.8(\sqrt{3}+1)}{2} \\ x &= 0.8(\sqrt{3}+1) \text{ m Ans.} \end{aligned}$$

11 → भूमि के एक बिंदु से एक 20 m ऊँची भवन के शिखर पर लगी एक संचार मीनार के तल और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

अथवा: → 20 m ऊँचा एक भवन के शिखर पर एक टॉवर है। जमीन पर स्थित एक बिंदु से टॉवर के आधार

और शिखर के उन्नयन कोण क्रमशः 45° और 60° हैं, तो टॉवर की ऊँचाई निकालें।

हल: माना कि आयुति ABCD में भवन की ऊँचाई (BC) = 20 m तथा उन्नयन कोण 45° और टॉवर की ऊँचाई x m तथा उन्नयन कोण 60° है।



$$\begin{aligned} \Delta ABC \text{ में,} \\ BC &= 20 \text{ m} \\ \theta &= 45^\circ \\ \tan \theta &= \frac{BC}{AB} \\ \tan 45^\circ &= \frac{20}{AB} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 1 &= \frac{20}{AB} \\ AB &= 20 \text{ m} \end{aligned}$$

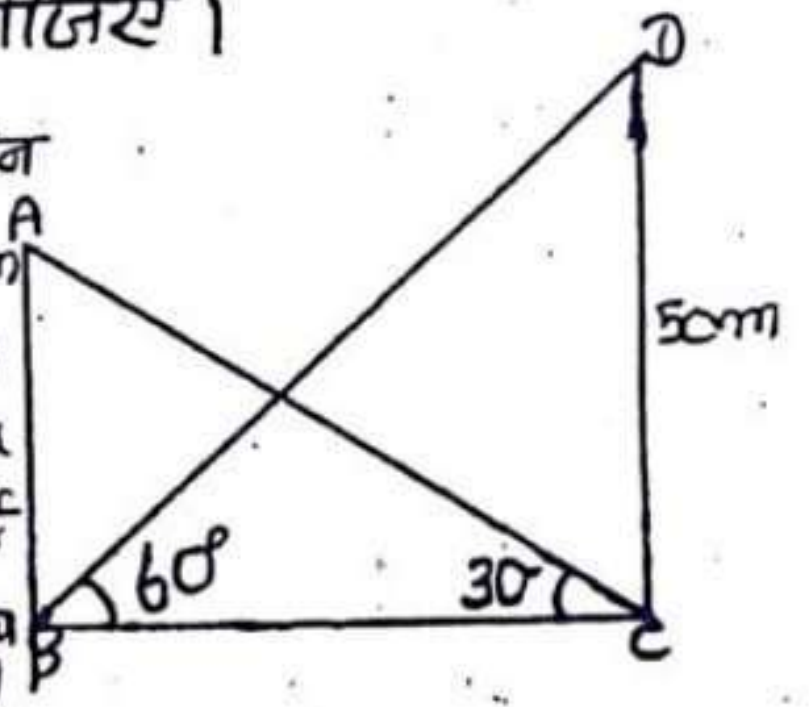
फिर

$$\begin{aligned} \Delta ABD \text{ में,} \\ AB &= 20 \text{ m} \\ BC &= 20 \text{ m} \\ CD &= x \text{ m} \\ BD &= CD + BC \\ BD &= x + 20 \\ \theta &= 60^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{BD}{AB} \\ \tan 60^\circ &= \frac{x+20}{20} \\ \Rightarrow \sqrt{3} &= \frac{x+20}{20} \\ \Rightarrow x+20 &= 20\sqrt{3} \\ x &= 20\sqrt{3}-20 \\ x &= 20(\sqrt{3}-1) \text{ m Ans.} \end{aligned}$$

12 → एक मीनार के पाद-बिन्दु से एक भवन के शिखर का उन्नयन कोण 30° है और भवन के पाद-बिन्दु से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 60° है। यदि मीनार 50 m ऊँची हो, तो भवन की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि AB भवन है जिसकी ऊँचाई x m है और उन्नयन कोण 30° है। अतः मीनार CD की ऊँचाई 50 m और उन्नयन कोण 60° है।



दल: $\triangle ABC$ में,
 $AB = x \text{ m}$
 $\theta = 30^\circ$
 $\tan \theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan 30^\circ = \frac{x}{BC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{BC}$

$\Rightarrow BC = \sqrt{3}x$

फिर

$\triangle BCD$ में,

$BC = \sqrt{3}x$

$CD = 50 \text{ m}$

$\theta = 60^\circ$

$\tan \theta = \frac{CD}{BC}$

$\tan 60^\circ = \frac{50}{\sqrt{3}x}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{50}{\sqrt{3}x}$

$\Rightarrow 3x = 50$

$x = \frac{50}{3} \text{ या } 16\frac{2}{3} \text{ m}$

$\therefore$ भवन की ऊँचाई = $16\frac{2}{3} \text{ m}$ Ans.

$\tan 60^\circ = \frac{x}{50\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{50\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x = 50 \times 3 = 150 \text{ m}$

$\therefore$ पहाड़ी की ऊँचाई = 150 m Ans.

14 $\rightarrow$ 1.5 मी. लम्बा एक प्रेक्षक एक चिमनी

से 28.5 मी की दूरी पर है। उसकी

आँख से चिमनी के शिखर का

उन्नयन कोण 60° है। चिमनी की

ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

दल: माना कि CD प्रेक्षक है जिसकी

ऊँचाई 1.5 मी है तो मुझे चिमनी

की ऊँचाई CE ज्ञात करनी है।

जिसका उन्नयन कोण 60° है।

$\triangle ADE$ में,

$AD = 28.5 \text{ m}$

$CD = 1.5 \text{ m}$

$\theta = 60^\circ$

$\tan \theta = \frac{DE}{AD}$

$\tan 60^\circ = \frac{DE}{28.5}$

$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{DE}{28.5}$

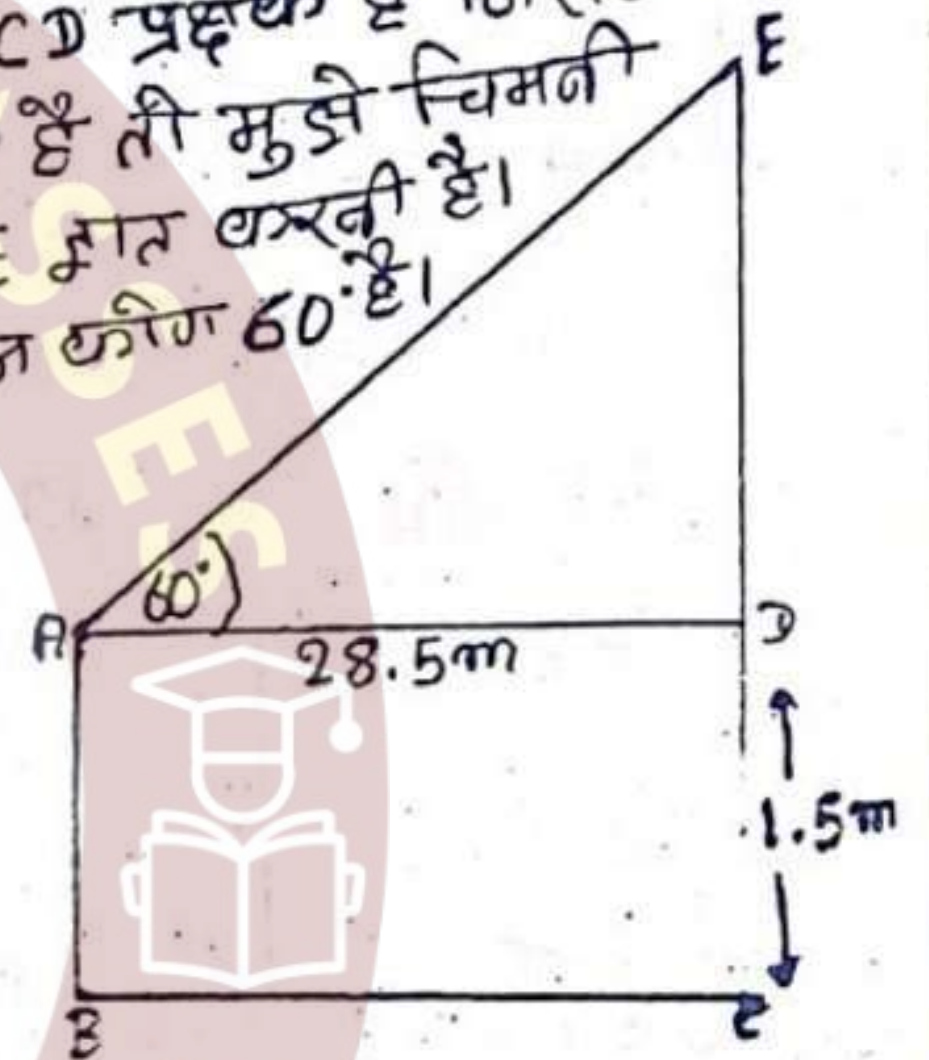
$DE = 28.5\sqrt{3} = 28.5 \times 1.732$

$DE = 49.3620 \text{ या } 49.362 \text{ m}$

$\therefore$ चिमनी की ऊँचाई = $DE + CD$

$= 49.362 + 1.5$

$= 50.862 \text{ m}$ Ans.



13 $\rightarrow$ किसी मीनार के आधार से पहाड़ी की चोटी का उन्नयन कोण 60° है और पहाड़ी के आधार से मीनार के शिखर का उन्नयन कोण 30° है। यदि मीनार की ऊँचाई 50 मी हो, तो पहाड़ी की ऊँचाई ज्ञात करें।

दल: माना कि CD पहाड़ है जिसकी ऊँचाई $x \text{ m}$ है और उन्नयन कोण 60° है जबकि मीनार की ऊँचाई 50 मी है और उन्नयन कोण 30° है।

$\triangle ABC$ में,

$AB = 50 \text{ m}$

$\theta = 30^\circ$

$\tan \theta = \frac{AB}{BC}$

$\tan 30^\circ = \frac{50}{BC}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{BC}$

$BC = 50\sqrt{3} \text{ m}$

फिर,

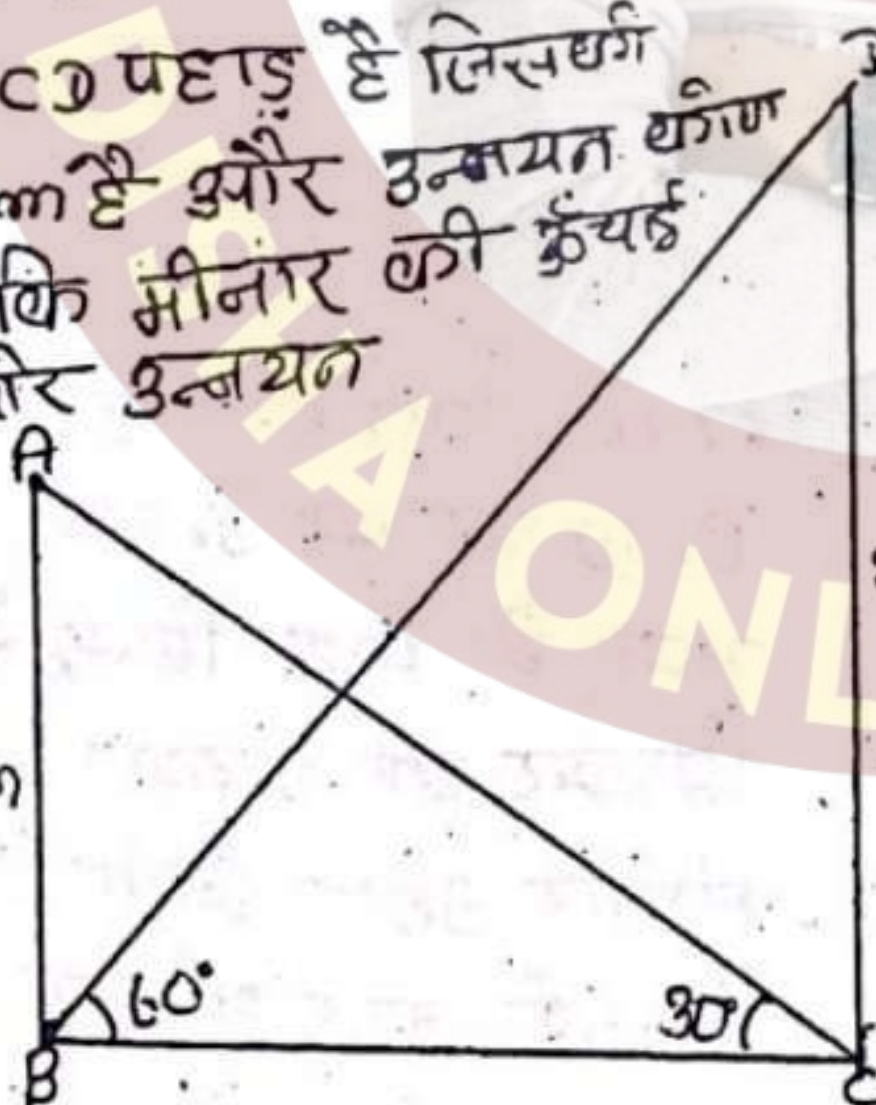
$\triangle BCD$ में,

$BC = 50\sqrt{3} \text{ m}$

$CD = x \text{ m}$

$\theta = 60^\circ$

$\tan \theta = \frac{CD}{BC}$



15 $\rightarrow$ 7 म ऊँचे भवन के शिखर से

एक केवल टॉवर के शिखर का

उन्नयन कोण 60° है और इसके पक्ष

का अवलम्बन कोण 45° है। टॉवर

की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

दल: भवन की ऊँचाई (AE) = 7 म

भवन का अवलम्बन कोण (θ) = 45°

टॉवर का उन्नयन कोण $\theta = 60^\circ$

टॉवर की ऊँचाई (BD) = ?

$\triangle EAB$ में,

$$EA = 7\text{m}$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{EA}{AB}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{7}{AB}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{7}{AB}$$

$$AB = 7\text{m}$$

फिर

$\triangle ECD$ में,

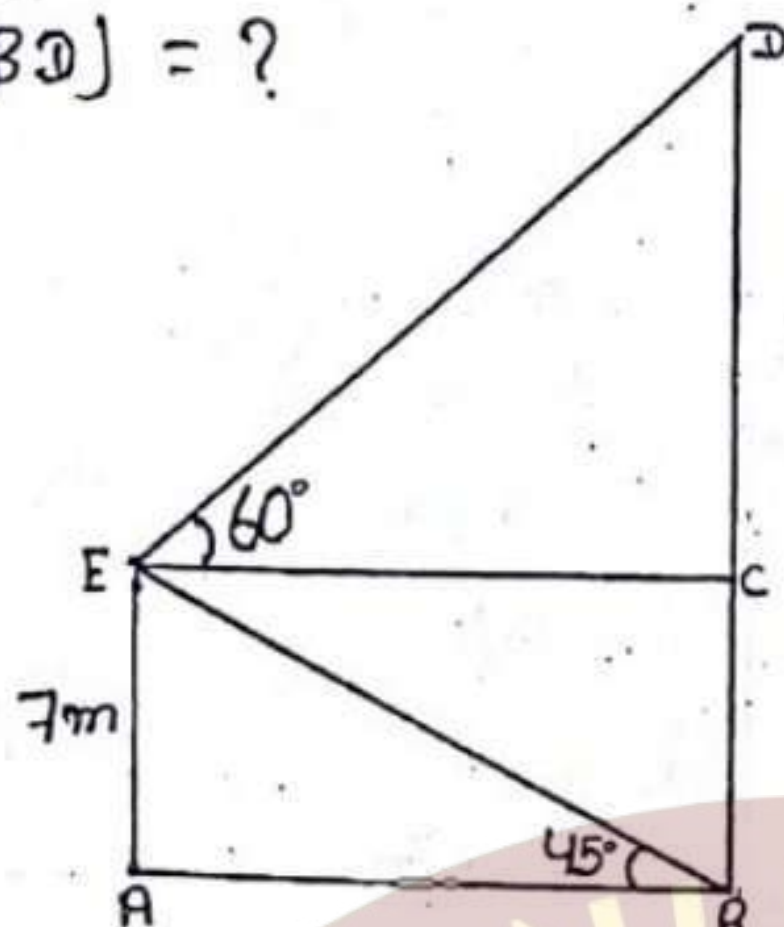
$$EC = AB$$

$$EC = 7\text{m}$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{CD}{EC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{CD}{7}$$



$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{CD}{7}$$

$$CD = 7\sqrt{3}$$

$$\therefore \text{टॉवर की ऊँचाई} = CD + BC$$

$$= 7\sqrt{3} + 7$$

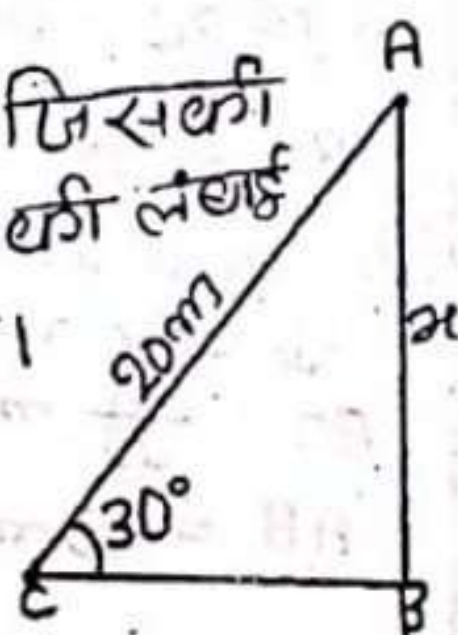
$$= 7(\sqrt{3} + 1)\text{m Ans.}$$

16 → एक मीनार के आधार से 30 मीटर की दूरी पर स्थित भूमि के एक बिन्दु से मीनार की चोटी का उन्नयन कोण 30° है, तो मीनार की ऊँचाई निकालें।

हल: प्रश्नावली 9.1 का प्रश्न 5 का उत्तर लिखें।

17 → एक सर्कस का कलाकार 20 मी. लंबी डोर पर चढ़ रहा है जो तनी हुई है। यदि भूमि के साथ डोर द्वारा बनाया गया कोण 30° है तो खम्भे की ऊँचाई निकालें।

हल: माना कि AB एक खम्भा है जिसकी ऊँचाई $x\text{m}$ है और डोर की लंबाई 20m तथा कोण 30° है।



$$AC = 20\text{m}, AB = x\text{m}, \theta = 30^\circ$$

$$\sin \theta = \frac{AB}{AC}$$

$$2x = 20$$

$$\sin 30^\circ = \frac{x}{20}$$

$$x = \frac{20}{2} \text{ LC}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{20}$$

$$x = 10\text{m}$$

$$\therefore \text{खम्भे की ऊँ.} = 10\text{m Ans.}$$

18 → एक नदी के पुल के एक छिन्दु से नदी के समुख किनारों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 45° है। यदि पुल किनारों से 3m की ऊँचाई पर हो तो नदी की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल: पुल की ऊँचाई (BD) = 3m

अवनमन कोण = 30° और 45°

नदी की चौड़ाई (AC) = ?

प्रश्न से,

$\triangle ABD$ में,

$$BD = 3\text{m}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{BD}{AB}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{3}{AB}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3}{AB}$$

$$AB = 3\sqrt{3}\text{m}$$

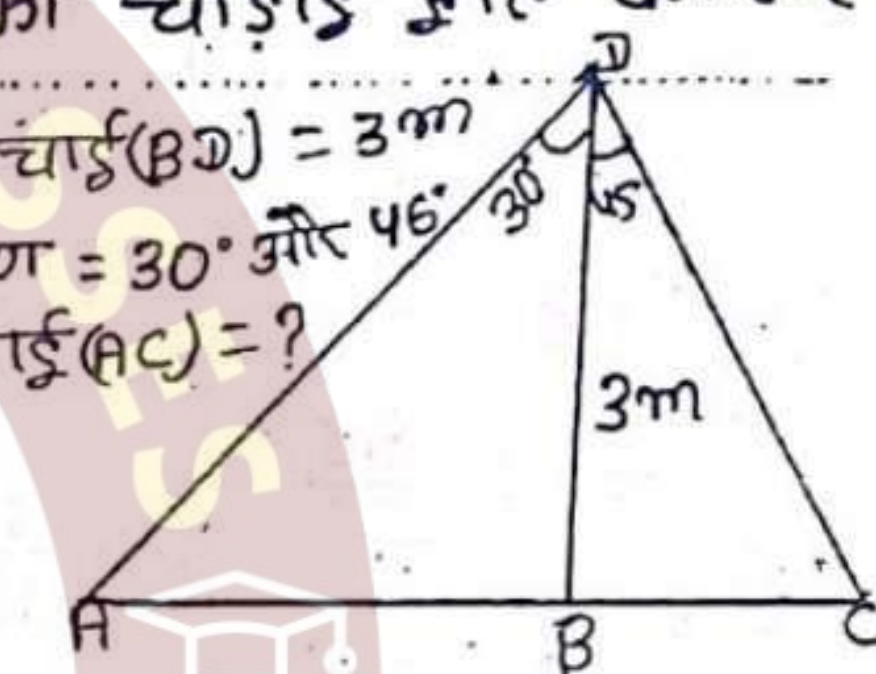
फिर,

$\triangle BCD$ में,

$$BD = 3\text{m}$$

$$\theta = 45^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{BD}{BC}$$



$$\tan 45^\circ = \frac{3}{BC}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{3}{BC}$$

$$BC = 3\text{m}$$

$$\therefore \text{नदी की चौड़ाई (AC)} = AB + BC$$

$$= 3\sqrt{3} + 3$$

$$= 3(\sqrt{3} + 1)\text{m Ans.}$$

19 → एक सड़क 50 मी. ऊँची मीनार के आधार तक सीधी जाती है। मीनार की चोटी से सड़क पर खड़ी दो कारों के अवनमन कोण क्रमशः 30° और 60° है। दोनों कारों के बीच की दूरी ज्ञात करें।

हल: मीनार की ऊँ. (CD) = 50m
दोनों छारों के बीच की दूरी (AB) = x
अवनमन कोण (θ) = 30° तथा 60°

अतः से,

ΔBCD में,

$$CD = 50m$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{CD}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{50}{BC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{50}{BC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} BC = 50$$

$$BC = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

फिर,

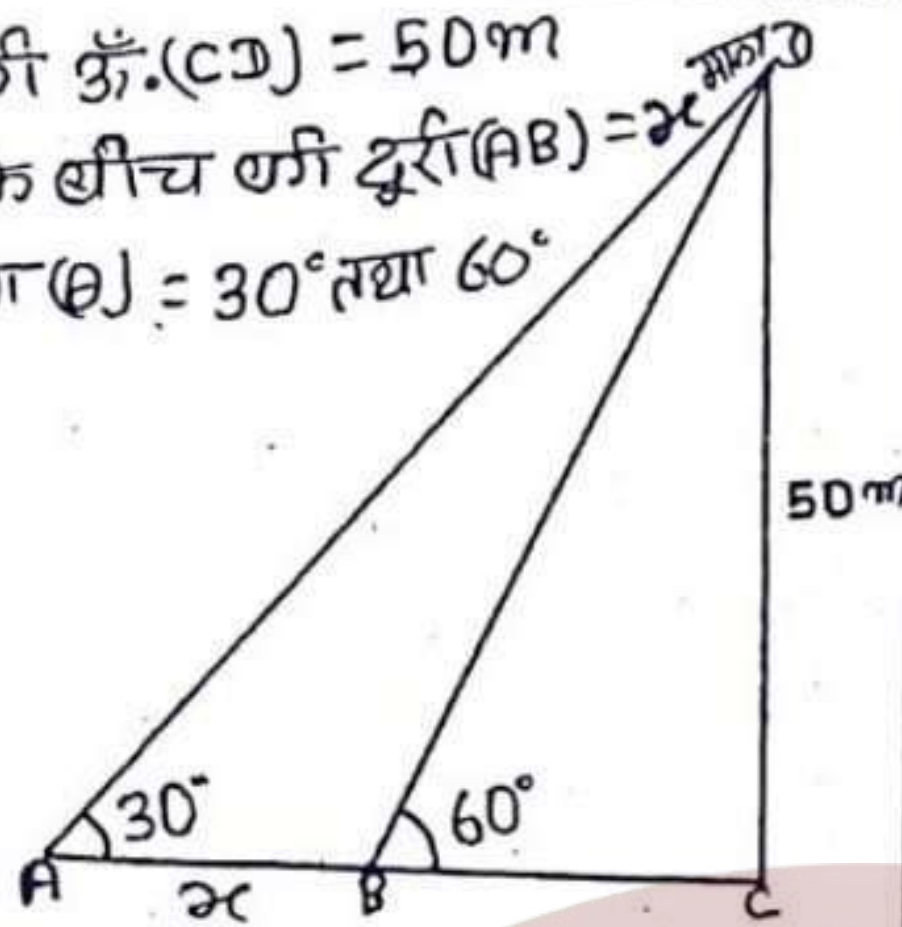
ΔACD में,

$$CD = 50m$$

$$AB = x$$

$$BC = \frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$AC = AB + BC$$



$$AC = x + \frac{50}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = 30^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{CD}{AC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{50}{x + \frac{50}{\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{50}{x + \frac{50}{\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow x + \frac{50}{\sqrt{3}} = 50\sqrt{3}$$

$$x = 50\sqrt{3} - \frac{50}{\sqrt{3}} = \frac{150 - 50}{\sqrt{3}}$$

$$x = \frac{100}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{100 \times 1.732}{3}$$

$$x = \frac{173.2}{3} = 57.73$$

$$x = 57.73 \text{ Amk.}$$

20 → मीनार के आधार से और एक सरल रेखा में 4m और 9m की दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं से मीनार के शिखर के उन्नयन कोण पूरक कोण हैं। (मीनार की ऊँचाई निकालें) सिद्ध कीजिए कि मीनार की ऊँचाई 6m है।

हल: माना कि CD मीनार है जिसकी ऊँचाई x m है और दूरी 4m तथा 9m है।

ΔBCD में,

$$CD = x \text{ m}$$

$$BC = 4 \text{ m}$$

$$\theta = 90^\circ - \theta$$

$$\tan \theta = \frac{CD}{BC}$$

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{x}{4}$$

$$\Rightarrow \cot \theta = \frac{x}{4} \quad \text{--- (i)}$$

फिर,

ΔACD में,

$$AC = 9 \text{ m}$$

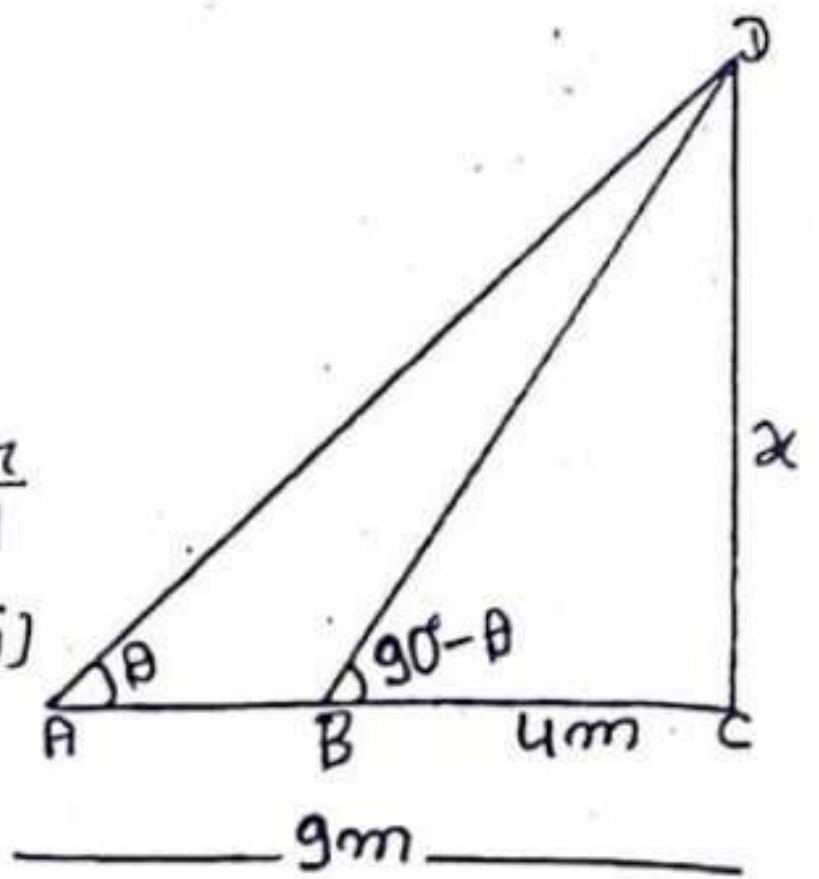
$$CD = x \text{ m}$$

$$\theta = \theta$$

$$\tan \theta = \frac{CD}{AC}$$

$$\tan \theta = \frac{x}{9} \quad \text{--- (ii)}$$

समी. (i) में समी. (ii) से गुणा करने पर



$$\therefore \tan \theta \times \cot \theta = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{9} \times \frac{x}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{36} = 1$$

$$x^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36} = 6 \text{ m Amk.}$$

21 → एक समतल जमीन पर खड़ी मीनार की छाया उस स्थिति में 40m अधिक लंबी हो जाती जब सूर्य का उन्नयन कोण 60° से घटकर 30° हो जाता है, मीनार की ऊँचाई निकालें।

हल: माना कि CD मीनार है जिसकी ऊँचाई x m तथा छाया की लंबाई AB = 40m है तथा उन्नयन कोण 60° तथा 30° है।

ΔBCD में,

$$CD = x \text{ m}$$

$$\theta = 60^\circ$$

$$\tan \theta = \frac{CD}{BC}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{x}{BC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} = \frac{x}{BC}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} BC = x$$

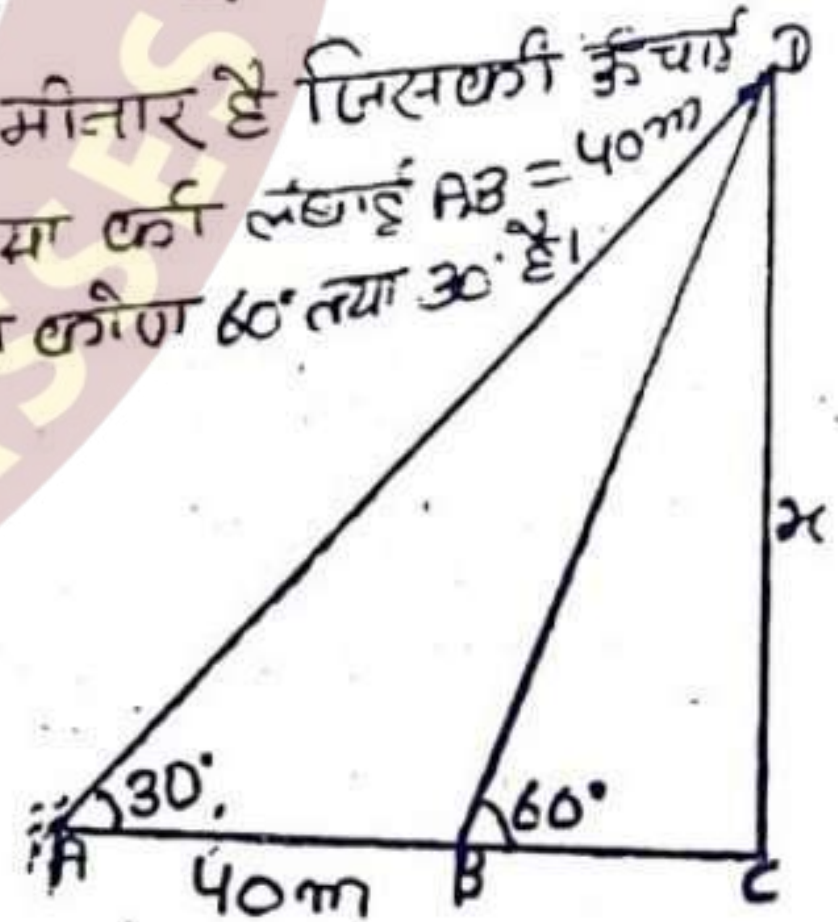
$$BC = \frac{x}{\sqrt{3}}$$

फिर ΔACD में

$$CD = x \text{ m}$$

$$BC = \frac{x}{\sqrt{3}} \text{ m}$$

$$AB = 40 \text{ m}$$



$$AC = BC + AB = \frac{x}{\sqrt{3}} + 40$$

$$AC = \frac{x + 40\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\tan \theta = \frac{CD}{AC}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{x}{\frac{x + 40\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{x + 40\sqrt{3}} \Rightarrow \sqrt{3}x = \frac{x + 40\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow 3x = x + 40\sqrt{3} \quad 2x = 40\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3x - x = 40\sqrt{3} \quad x = \frac{40\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \text{ m Ans.}$$

प्रश्नावली $\rightarrow 6/10$

1 $\rightarrow$ एक समबाहु त्रिभुज ABC की भुजा $2a$ है। उसके प्रत्येक शीर्षलंब की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल: समबाहु ΔABC में,

$$\text{भुजा (AB)} = 2a$$

फिर,

समकोण ΔADB में

$$AB = 2a$$

$$BD = \frac{AB}{2} = \frac{2a}{2}$$

$$BD = a$$

$$\therefore \text{शीर्षलंब की लं. (AD)} = \sqrt{AB^2 - BD^2}$$

$$= \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3} \text{ Ans.}$$

2 $\rightarrow$ ΔABC एक समबाहु Δ है जिसकी प्रत्येक भुजा a cm है तो सिद्ध करें कि त्रिभुज का क्षेत्रफल $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ होगा।

हल: ABC एक समबाहु Δ है

तो मुझे सिद्ध करना है कि ΔABC का क्षेत्रफल $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ है।

$$\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ है।}$$

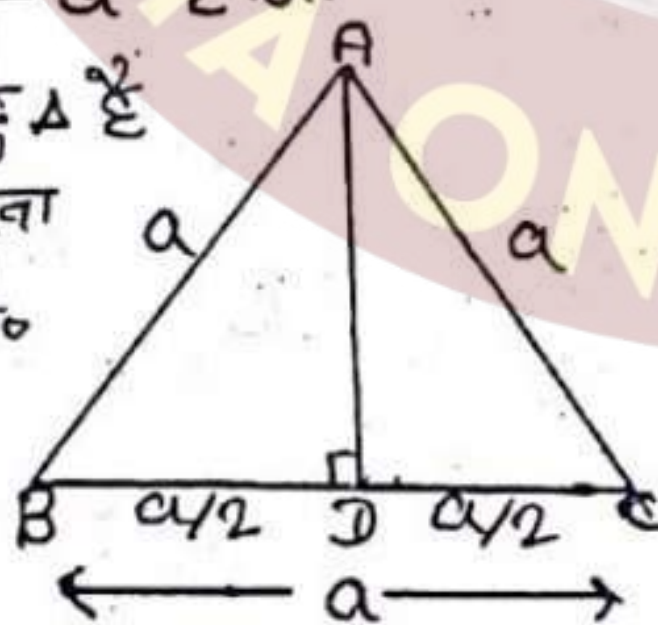
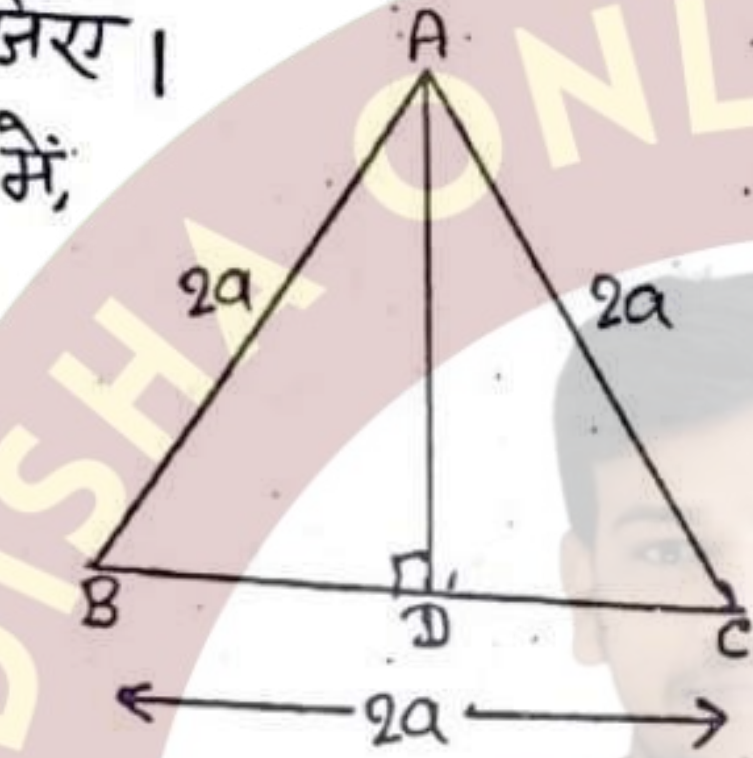
समकोण ΔADB में,

$$AB = a$$

$$BD = \frac{a}{2}$$

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2}$$

$$AD = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$



$$= \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4a^2 - a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

समबाहु ΔABC में,

$$AB = a$$

$$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \text{समबाहु } \Delta \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times AB \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \text{ proved.}$$

3 $\rightarrow$ 10m लंबी एक सीढ़ी एक दीवार पर टिकाने पर भूमि से 8m की ऊँचाई पर स्थित एक खिड़की तक पहुँचती है। दीवार के आधार से सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: ΔABC में,

$$\text{दीवार की ऊँचाई (AB)} = 8 \text{ m}$$

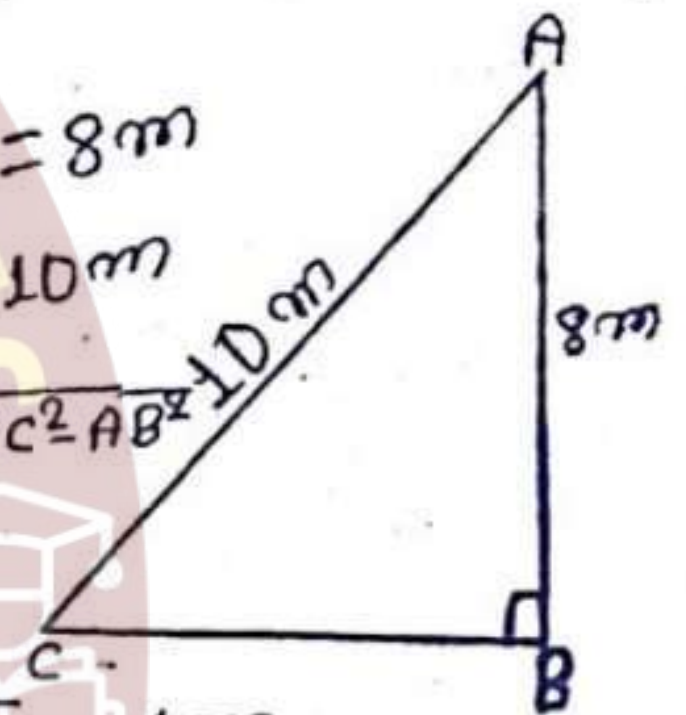
$$\text{सीढ़ी की लंबाई (AC)} = 10 \text{ m}$$

$$\text{सीढ़ी की दूरी (BC)} = \sqrt{AC^2 - AB^2}$$

$$BC = \sqrt{10^2 - 8^2}$$

$$= \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6 \text{ m}$$

$$\therefore \text{सीढ़ी के निचले सिरे की दूरी (BC)} = 6 \text{ m}$$



4 $\rightarrow$ 18m ऊँचे एक उद्घाटन खंभे के उपरी सिरे से एक तार का एक सिरा जुड़ा हुआ है तथा तार का दूसरा सिरा एक खूँटे से जुड़ा हुआ है। खंभे के आधार से खूँटे की कितनी दूरी पर गाड़ा जाए कि तार तना रहे जबकि तार की लंबाई 24m है।

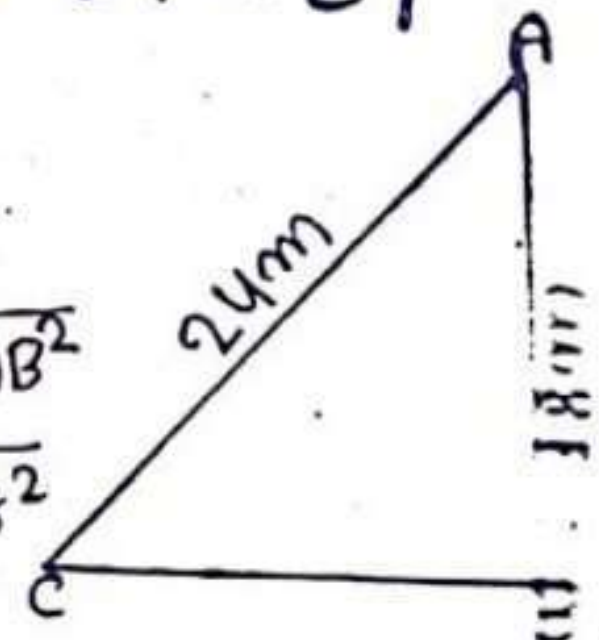
हल: ΔABC में,

$$\text{खंभे की ऊँचाई (AB)} = 18 \text{ m}$$

$$\text{तार की लं. (AC)} = 24 \text{ m}$$

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$$

$$BC = \sqrt{24^2 - 18^2}$$



$$BC = \sqrt{576 - 324} = \sqrt{252} = 6\sqrt{7} \text{ m}$$

$\therefore$ खंभे के आधार से खूँटे की दूरी =

$$6\sqrt{7} \text{ m Ans.}$$

5 $\rightarrow$ दो खंभे जिनकी फाँचाईयाँ 6m और 11m हैं तथा ये समतल भूमि पर खड़े हैं। यदि इनके उपरी सिरों के बीच की दूरी 12m है तो इनके उपरी सिरों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए।

हल: आकृति ABCDE में ABE एक समकोण Δ है।

$\therefore \Delta ABE$ में,

$$BE = 12 \text{ m}$$

$$DE = CB = 6 \text{ m}$$

$$AC = 11 \text{ m}$$

$$AB = AC - BC$$

$$AB = 11 - 6 = 5 \text{ m}$$

$$AE = \sqrt{BE^2 + AB^2}$$

$$AE = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169}$$

$$AE = \sqrt{13 \times 13} = 13 \text{ m}$$

$\therefore$ ऊपरी सिरों के बीच की दूरी = 13m Ans.

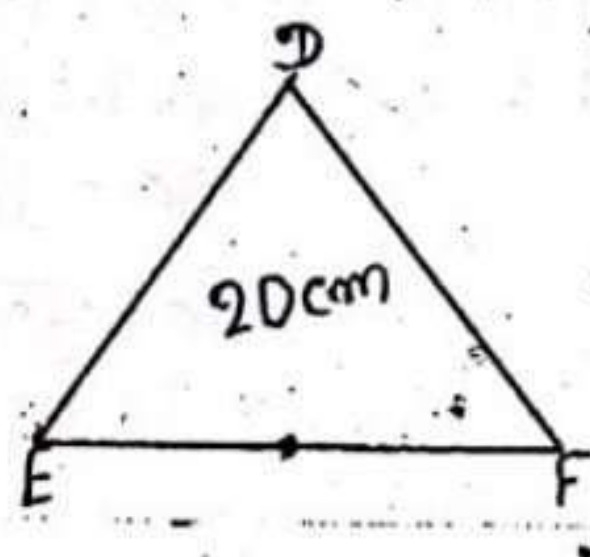
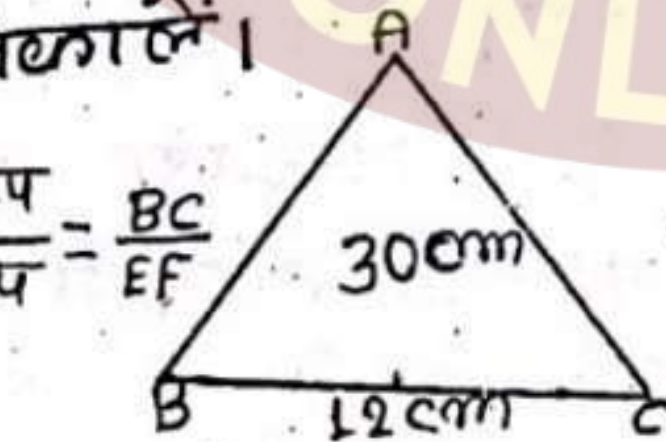
6 $\rightarrow$ दो समरूप त्रिभुजों की परिमाप 30cm और 20cm हैं, यदि पहले त्रिभुज की एक भुजा 12cm हो तो दूसरी त्रिभुज की संगत भुजा निकालें।

हल: $\frac{\Delta ABC \text{ का परिमाप}}{\Delta DEF \text{ का परिमाप}} = \frac{BC}{EF}$

$$\Rightarrow \frac{30}{20} = \frac{12}{EF}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{12}{EF}$$

$$EF = 8 \text{ cm Ans.}$$



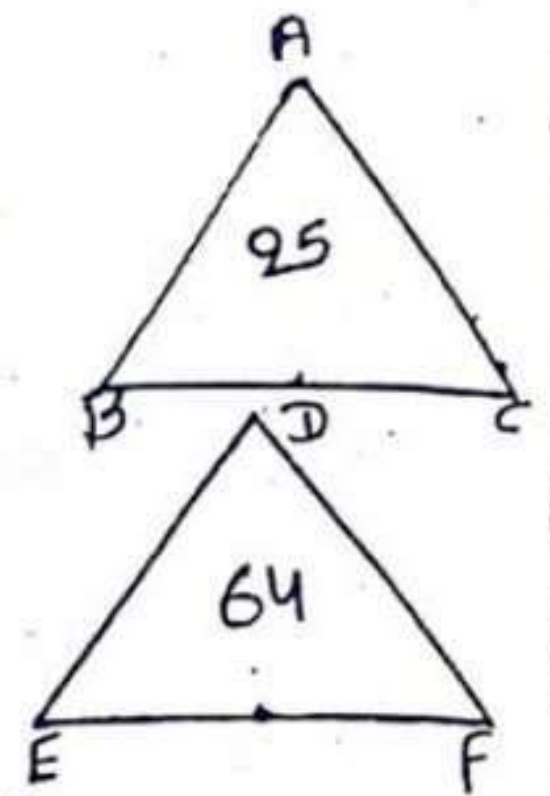
7 $\rightarrow$ दो समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात 25:64 है तो उनके भुजाओं का अनुपात निकालें।

हल: $\frac{\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल}}{\Delta DEF \text{ का क्षेत्रफल}} = \frac{AB^2}{DE^2}$

$$\Rightarrow \frac{25}{64} = \frac{AB^2}{DE^2}$$

$$\frac{AB}{DE} = \sqrt{\frac{25}{64}}$$

$$= \frac{5}{8} \text{ या } 5:8 \text{ Ans.}$$



8 $\rightarrow$ दी गयी आकृति में, $DE \parallel BC$ तो x का मान निकालें।

हल: $\Delta ADE \sim \Delta ABC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{DE} = \frac{AE}{EC}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{x-4} = \frac{x-3}{3x-19}$$

$$\Rightarrow (x-4)(x-3) = 4(3x-19)$$

$$\Rightarrow x^2 - 3x - 4x + 12 = 12x - 76$$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + 12 - 12x + 76 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 19x + 88 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 11x - 8x + 88 = 0$$

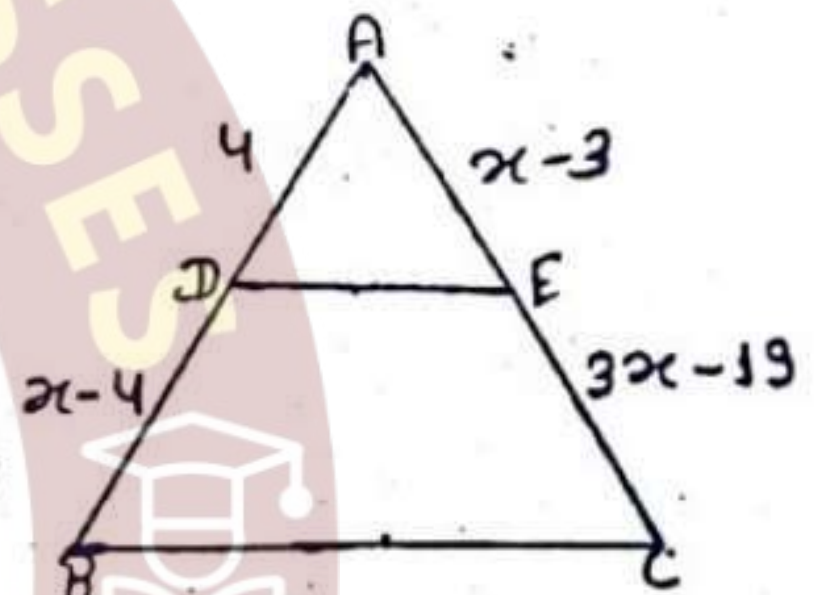
$$\Rightarrow x(x-11) - 8(x-11) = 0$$

$$\Rightarrow (x-8)(x-11) = 0$$

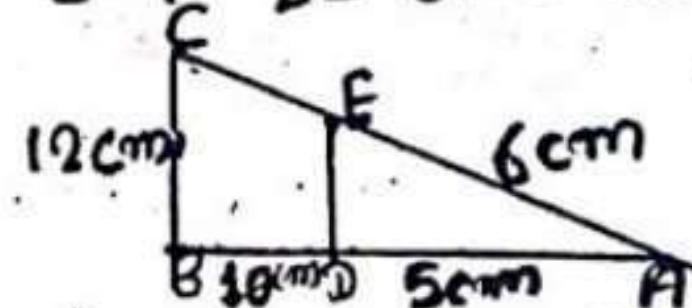
$$x-8=0 \quad | \quad x-11=0$$

$$x=8 \quad | \quad x=11$$

$$\therefore x=8, 11 \text{ Ans.}$$



9 $\rightarrow$ दिये गये आकृति में $AD = 5 \text{ cm}$, $AE = 6 \text{ cm}$, $BC = 12 \text{ cm}$ तथा $DE = 10 \text{ cm}$ हो तो EC और DE का मान निकालें।



हल: $\triangle CBA$ में,
 $BD = 10\text{cm}$
 $AD = 5\text{cm}$
 $AE = 6\text{cm}$
 $EC = ?$
 $DE = ?$
 $\frac{BD}{AD} = \frac{EC}{AE}$
 $\Rightarrow \frac{10}{5} = \frac{EC}{6}$
 $\Rightarrow 2 = \frac{EC}{6}$
 $EC = 12\text{cm}$

फिर $\triangle EDA$ में,
 $AD = 5\text{cm}$
 $AE = 6\text{cm}$
 $DE = \sqrt{AE^2 - AD^2}$
 $DE = \sqrt{6^2 - 5^2}$
 $DE = \sqrt{36 - 25}$
 $DE = \sqrt{11} = 3.31\text{cm}$
 $\left\{ \begin{array}{l} EC = 12\text{cm} \\ DE = 3.31\text{cm} \end{array} \right\} \text{Ans.}$

10 → समलम्ब चतुर्भुज $ABCD$ में $AB \parallel CD$ और $AB = 2CD$ यदि $\triangle AOB$ का क्षेत्रफल 84cm^2 तो $\triangle COD$ का क्षेत्रफल निकालें।

हल: $AB = 2CD$

$\triangle COD$ का क्षेत्रफल = x माना

प्रश्न से,

$\frac{\triangle AOB \text{ का क्षेत्रफल}}{\triangle COD \text{ का क्षेत्रफल}} = \left(\frac{AB}{CD} \right)^2$

$\Rightarrow \frac{84}{x} = \left(\frac{2CD}{CD} \right)^2 \Rightarrow \frac{84}{x} = 4$

$\Rightarrow 4x = 84$

$x = \frac{84}{4} = 21$

$x = 21\text{cm}^2 \text{ Ans.}$

11 → वृत्त में रेखा AB और CD परस्पर बिन्दु E पर काटती हैं यदि $AE = 3\text{cm}$, $BE = 6\text{cm}$ और $CE = 2\text{cm}$ हो, तो CD का मान निकालें।

हल: आकृति $ABCD$ में

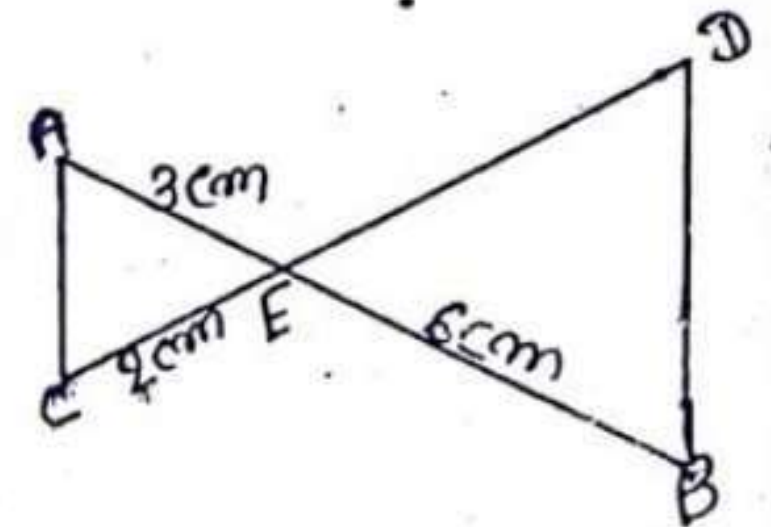
$AE = 3\text{cm}$
 $EB = 6\text{cm}$
 $CE = 2\text{cm}$
 $CD = ?$

$\frac{AE}{CE} = \frac{ED}{EB}$

$\Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{ED}{6}$

$ED = 9\text{cm}$

$\therefore CD = CE + ED$
 $= 2 + 9$
 $= 11\text{cm} \text{ Ans.}$



12 → एक बिन्दु A से, जो एक वृत्त के केंद्र से 5cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 4cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: समकोण $\triangle AOB$ में,

$AO = 5\text{cm}$

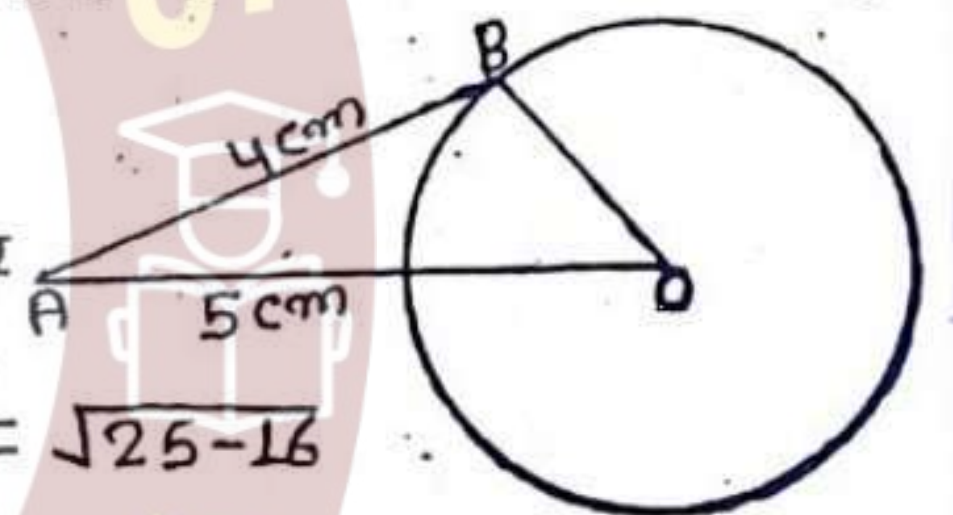
$AB = 4\text{cm}$

$OB = \sqrt{AO^2 - AB^2}$

$OB = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{25 - 16}$

$OB = \sqrt{9} = 3\text{cm}$

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या (OB) = $3\text{cm} \text{ Ans.}$



13 → एक बिन्दु Q से एक वृत्त पर स्पर्श रेखा की लंबाई 24cm तथा Q की केंद्र से दूरी 25cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: समकोण $\triangle POQ$ में,

$OQ = 25\text{cm}$

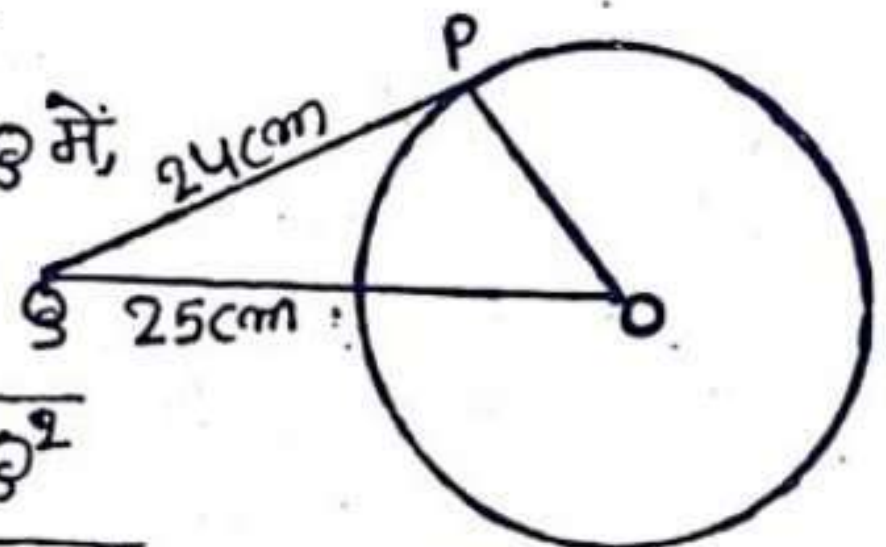
$PQ = 24\text{cm}$

$OP = \sqrt{OQ^2 - PQ^2}$

$OP = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576}$

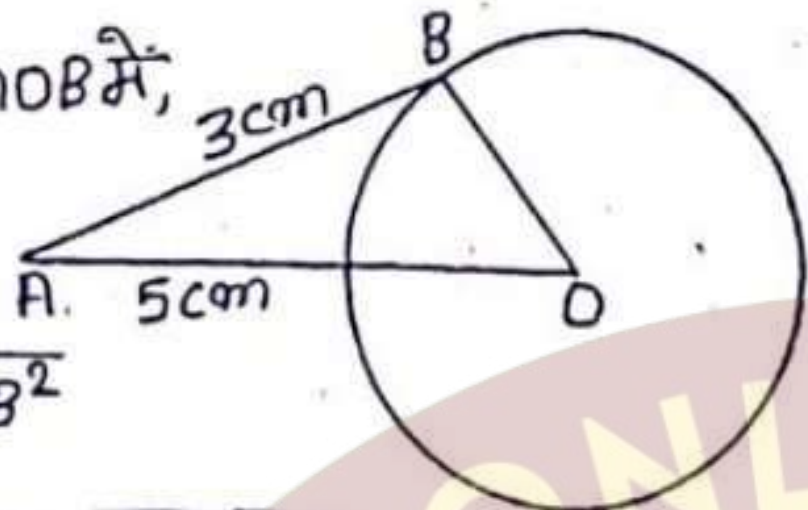
$OP = \sqrt{49} = 7\text{cm}$

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या (OP) = $7\text{cm} \text{ Ans.}$



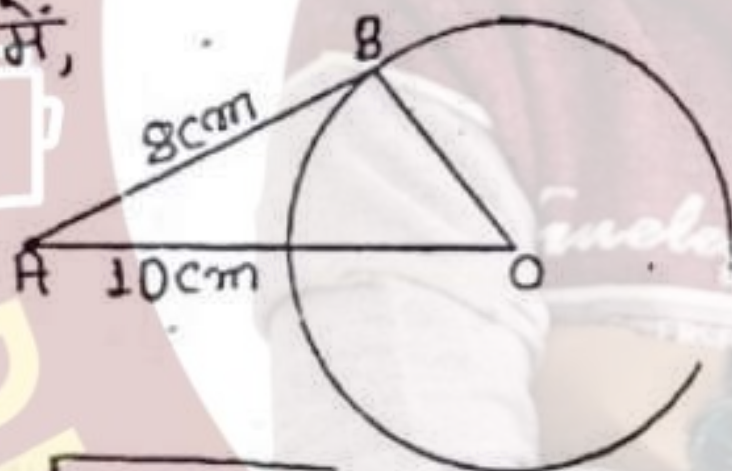
14 → एक बिन्दु A से, जो एक वृत्त के केन्द्र से 5cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 3 सेमी है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: समकोण $\triangle AOB$ में,
 $OA = 5\text{cm}$
 $AB = 3\text{cm}$
 $OB = \sqrt{OA^2 - AB^2}$
 $OB = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4\text{cm}$
 $\therefore$ वृत्त की त्रिज्या (OB) = 4cm Ans.



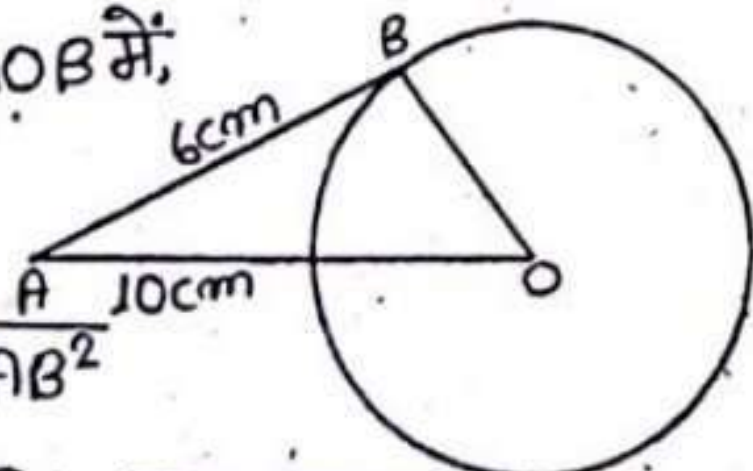
15 → एक बिन्दु A से, जो वृत्त के केन्द्र से 10cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 8cm है, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: समकोण $\triangle AOB$ में,
 $OA = 10\text{cm}$
 $AB = 8\text{cm}$
 $OB = \sqrt{OA^2 - AB^2}$
 $OB = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6\text{cm}$
 $\therefore$ वृत्त की त्रिज्या (OB) = 6cm Ans.



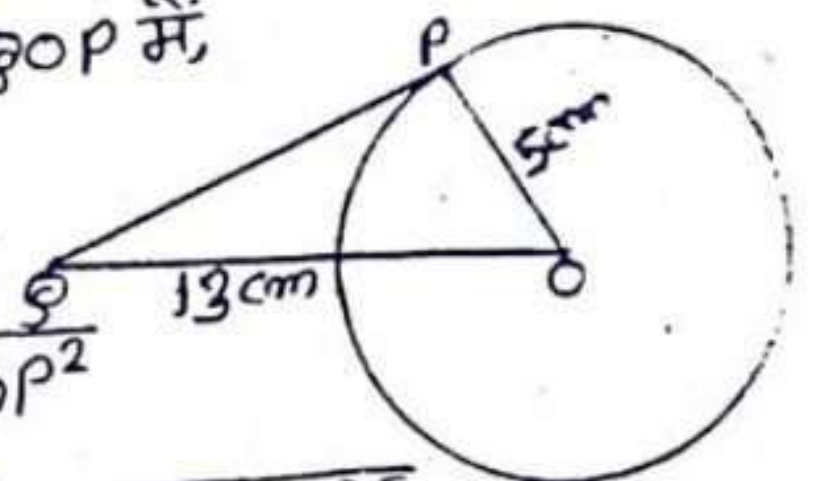
16 → एक बिन्दु A से, जो एक वृत्त के केन्द्र से 10cm दूरी पर है, वृत्त पर स्पर्श रेखा की लम्बाई 6cm है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: समकोण $\triangle AOB$ में,
 $OA = 10\text{cm}$
 $AB = 6\text{cm}$
 $OB = \sqrt{OA^2 - AB^2}$
 $OB = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8\text{cm}$
 $\therefore$ वृत्त की त्रिज्या (OB) = 8cm Ans.



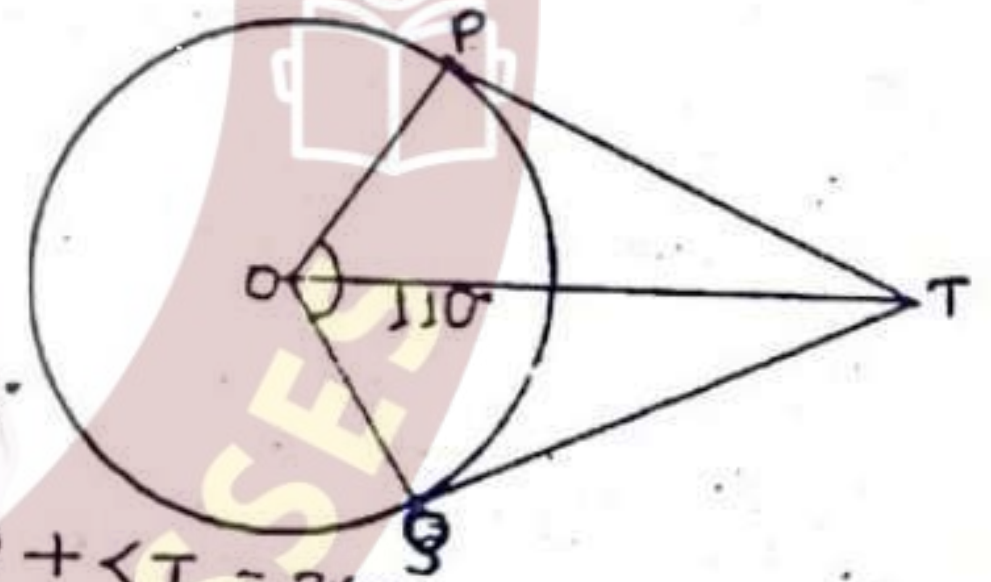
17 → 5 सेमी त्रिज्या वाले एक वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा PQ केन्द्र O से जाने वाली एक रेखा से बिंदु Q पर इस प्रकार मिलती है कि $OQ = 13\text{cm}$, PQ की लम्बाई क्या होगी?

हल: समकोण $\triangle OQP$ में,
 $OQ = 13\text{cm}$
 $OP = 5\text{cm}$
 $PQ = \sqrt{OQ^2 - OP^2}$
 $PQ = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25}$
 $PQ = \sqrt{144} = 12\text{cm}$
 $\therefore$ PQ की लम्बाई = 12cm Ans.



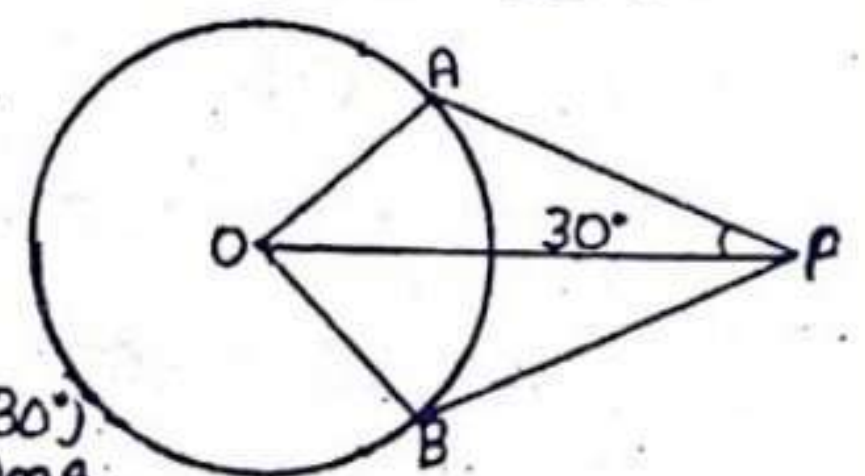
18 → चित्र में TP, TQ केन्द्र O वाले किसी वृत्त पर दो स्पर्श रेखाएँ हैं जिनमें $\angle POQ = 110^\circ$ तो $\angle PTQ$ का मान ज्ञात करें।

हल: $\angle P = 90^\circ$
 $\angle Q = 90^\circ$
 $\angle POQ = 110^\circ$
 $\angle PTQ = ?$
 $\angle P + \angle O + \angle Q + \angle T = 360^\circ$
 $\Rightarrow 90^\circ + 110^\circ + 90^\circ + \angle T = 360^\circ$
 $\Rightarrow 290^\circ + \angle T = 360^\circ$
 $\angle T = 360^\circ - 290^\circ = 70^\circ$
 $\therefore \angle PTQ = 70^\circ$ Ans.



19 → चित्र के चित्र में PA और PB वृत्त की स्पर्श रेखा हैं तथा $\angle APO = 30^\circ$ तो $\angle AOP = ?$

हल: $\angle APO = 30^\circ$
 $\angle OAP = 90^\circ$
 $\therefore \angle AOP = 180^\circ - (90^\circ + 30^\circ)$
 $= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ Ans.



20 → किसी चक्रीय चतुर्भुज के सामने-सामने का कोण 4:5 के अनुपात में है, तो कोणों का मान ज्ञात करें।

हल: एक कोण का मान = $4x$ माना

दूसरा $\angle = 5x$

प्रश्न से,

चक्रीय चतुर्भुज में सामने-सामने के कोणों का योग = 180°

$$\angle B + \angle D = 180^\circ$$

$$4x + 5x = 180^\circ$$

$$9x = 180^\circ$$

$$x = \frac{180}{9} = 20^\circ$$

$$x = 20^\circ$$

एक कोण का माप = $4x$

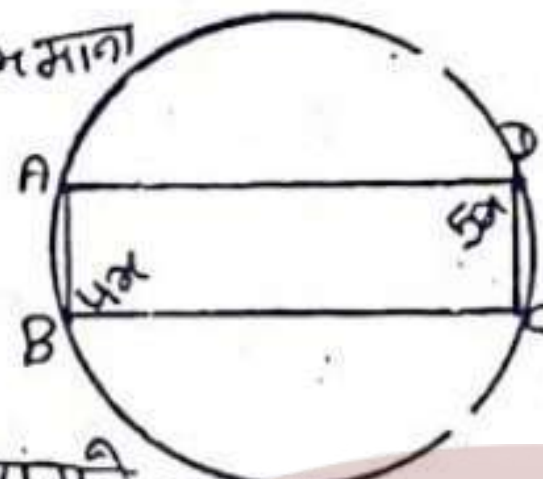
$$= 4 \times 20^\circ$$

$$= 80^\circ \text{ Ans.}$$

दूसरा कोण का माप = $5x$

$$= 5 \times 20^\circ$$

$$= 100^\circ \text{ Ans.}$$



21 → ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसका कोण C समकोण है। सिद्ध कीजिए कि $AB^2 = 2AC^2$ है।

अथवा: → ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है जिसमें $AC = BC$ है। यदि $AB^2 = 2AC^2$ है, तो सिद्ध कीजिए कि ABC एक समकोण त्रिभुज है।

हल: समद्विबाहु Δ में, C समकोण है तो $AB^2 = 2AC^2$ सिद्ध करना है।

ΔABC में,

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$AB^2 = AC^2 + AC^2 [AC = BC]$$



$$AB^2 = 2AC^2$$

Proved.

22 → ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा $AC \perp BC$ है, तो दर्शाइए कि $AB^2 = BC \cdot BD$

हल: ABC एक त्रिभुज है जिसका कोण A समकोण है तथा $AC \perp BC$ है तो

$$AB^2 = BC \cdot BD \text{ सिद्ध करना है।}$$

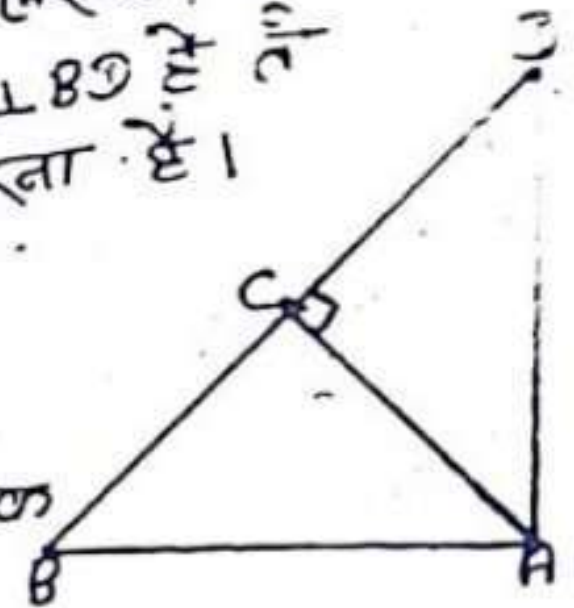
$$\therefore AC \perp BD$$

$\therefore \Delta ABC \sim \Delta ADC$ दोनों एक समरूप त्रिभुज हैं।

$$\therefore \Delta ABC = \Delta ADC$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$$

$$\Rightarrow AB^2 = BC \cdot BD \text{ Proved.}$$



23 → त्रिभुज ABC में, $\angle A = 90^\circ$ है। यदि $AD \perp BC$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ है।

हल: ABC एक समकोण त्रिभुज है जिसका कोण $\angle A = 90^\circ$ है और $AD \perp BC$ है तो $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ सिद्ध करना है।

ΔADC में,

$$AD^2 = AC^2 - CD^2 \quad (i)$$

फिर

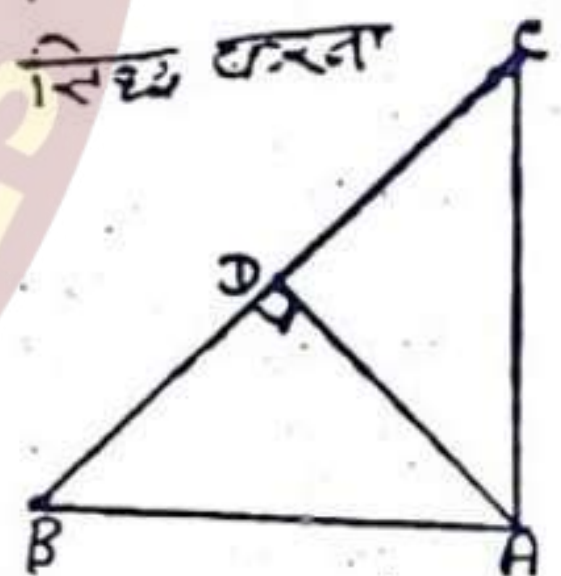
ΔBDA में,

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 \quad (ii)$$

$$\therefore AD^2 = AD^2$$

$$\Rightarrow AC^2 - CD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$\Rightarrow AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2 \text{ Proved.}$$



24 → समलंब ABCD, जिसमें $AB \parallel DC$ है, विकर्ण AC और BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं। दो त्रिभुजों की समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए,

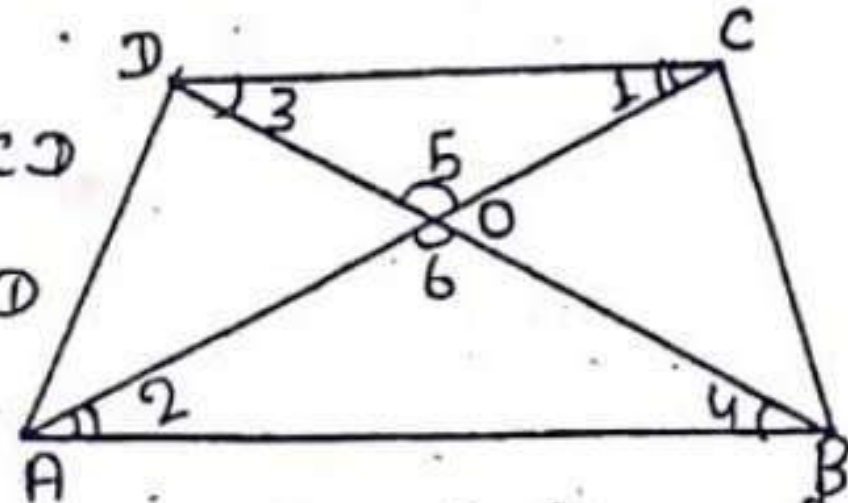
दशाहिर कि $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ है।

हल: समलंब

चतुर्भुज ABCD

जिसमें $AB \parallel CD$

है और विकर्ण



AC तथा BD परस्पर O पर प्रतिच्छेद करते हैं तो $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ सिद्ध करना है।

∴ उपपत्ति: $AB \parallel DC$

$\triangle ODC$ और $\triangle OBA$ में

$$\angle 1 = \angle 2$$

$$\angle 5 = \angle 6$$

$$\angle 3 = \angle 4$$

$$\therefore \triangle ODC \sim \triangle OBA$$

$$\Rightarrow \frac{OD}{BO} = \frac{OC}{OA} \Rightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} \text{ Proved.}$$

25 → दो संकेन्द्रीय वृत्तों की त्रिज्याएँ 10 सेमी और 6cm हैं। छोटे वृत्त (आन्तरिक) की जीवा की लम्बाई निकालें जो छोटे (आन्तरिक) वृत्त को स्पर्श करती है।

हल: $\triangle OPB$ में,

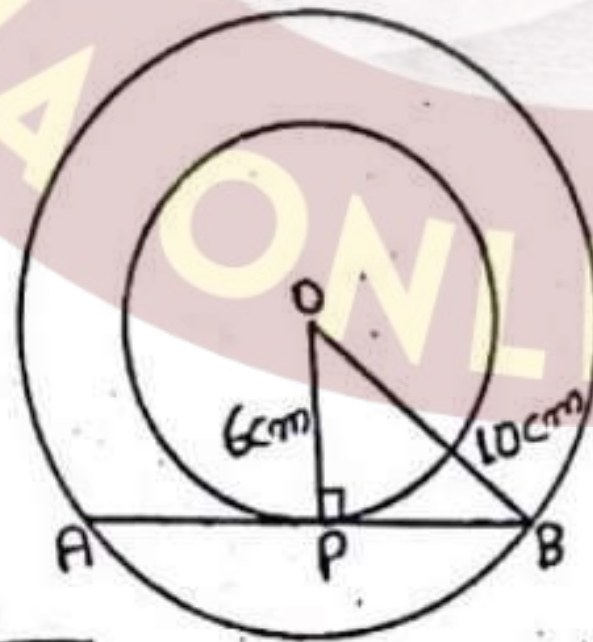
$$OB = 10 \text{ cm}$$

$$OP = 6 \text{ cm}$$

$$PB = \sqrt{OB^2 - OP^2}$$

$$PB = \sqrt{10^2 - 6^2}$$

$$PB = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8 \text{ cm}$$



∴ छोटे वृत्त की जीवा की लम्बाई (AB) = 8 + 8 = 16 cm Ans.

त्रिभुज

इसमें से एक प्रश्न 5 अंक का होगा

1 → सिद्ध करें कि एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योगफल के बराबर होता है।

अथवा: → सिद्ध करें कि एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

अथवा: → (पाइथागोरस प्रमेय) किसी समकोणीय त्रिभुज में एक भुजा का वर्ग, अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

अथवा: → किसी समकोण त्रिभुज बनाने वाली भुजाएँ 3cm और 4cm हैं तो उस त्रिभुज का कर्ण ज्ञात करें तथा जिस प्रमेय के आधार पर हल होता है उस प्रमेय को लिखकर सिद्ध करें।

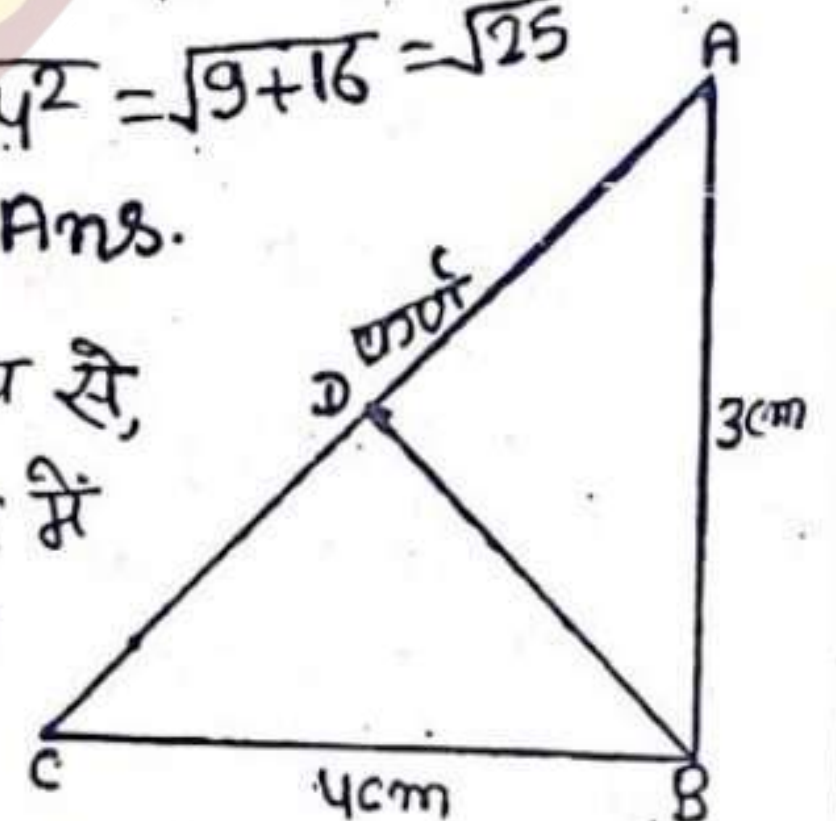
$$\text{हल: कर्ण} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm Ans.}$$

पाइथागोरस प्रमेय से, एक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के

वर्गों के योग के बराबर होता है।

उपपत्ति: त्रिभुजों की समरूपता की सहायता से,

रचना: $BD \perp AC$ खींचा।



$\triangle ABD$ और $\triangle ABC$ में $\angle A = \angle A$
 $\angle ABD \sim \triangle ABC$

$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ [समरूप त्रिभुजों की संगत भुजाएँ अनुपातिक होती हैं]

$$AB^2 = AD \times AC \quad \text{--- (i)}$$

ठीक इसी प्रकार

$$BC^2 = DC \times AC \quad \text{--- (ii)}$$

समी. (i) में समी. (ii) जोड़ने पर

$$AB^2 + BC^2 = AD \times AC + DC \times AC$$

$$AB^2 + BC^2 = AC(AD + DC)$$

$$AB^2 + BC^2 = AC \times AC [AD + DC = AC]$$

$$AB^2 + BC^2 = AC^2$$

$$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 \text{ Proved.}$$

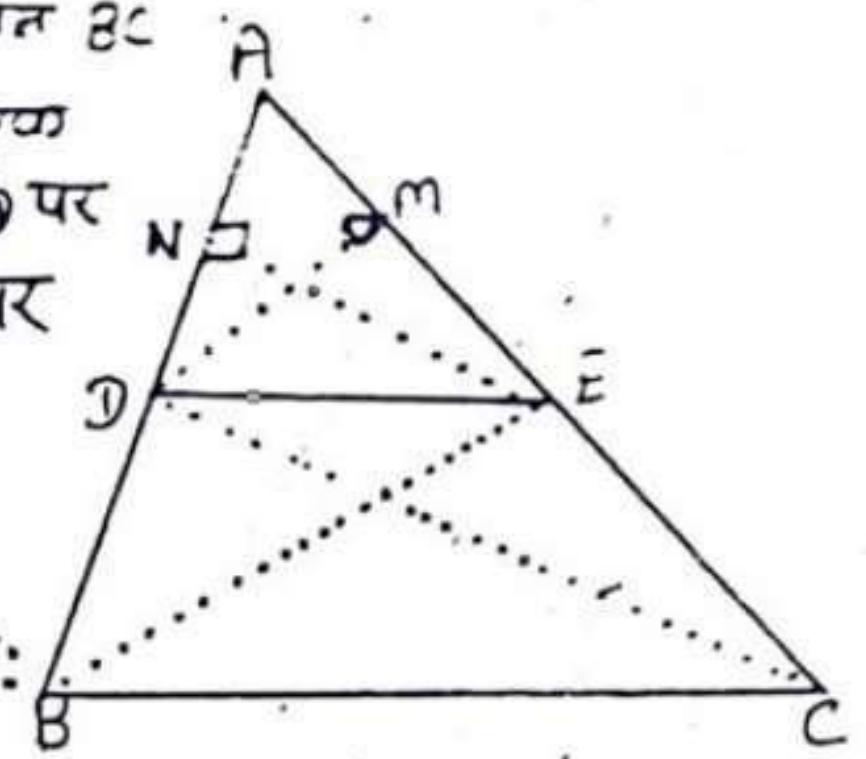
2 → आधारभूत अनुपातिकता प्रमेय या थेल्स प्रमेय: यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को काटते हुए, कोई रेखा खींचे तो वह त्रिभुज की अन्य दोनों भुजाओं को समान अनुपात में विभाजित करती है।

अथवा: → यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को निम्न-निम्न बिंदुओं पर प्रतिच्छेद करने के लिए एक रेखा खींचा जाए, तो ये अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं।

हल: $\triangle ABC$ में BC के समांतर एक रेखा AB को D पर तथा AC को E पर प्रतिच्छेदित करती है।

सिद्ध करना है:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$



रचना: BE, CD को मिलाइए तथा $EN \perp AB$, $DM \perp AC$ खींचा।

$$\frac{\text{ar}(\triangle ADE)}{\text{ar}(\triangle BDE)} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times EN}{\frac{1}{2} \times BD \times EN} = \frac{AD}{DB} \quad \text{--- (i)}$$

$$\text{फिर, } \frac{\text{ar}(\triangle ADE)}{\text{ar}(\triangle DEC)} = \frac{\frac{1}{2} \times AE \times DM}{\frac{1}{2} \times EC \times DM} = \frac{AE}{EC} \quad \text{--- (ii)}$$

$$\text{अतः } \text{ar}(\triangle BDE) = \text{ar}(\triangle DEC) \quad \text{--- (iii)}$$

$\therefore$ समी. (i), (ii) तथा (iii) से हमें प्राप्त होता है।

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \text{ Proved.}$$

3 → यदि एक रेखा किसी त्रिभुज की दो भुजाओं को एक ही अनुपात में विभाजित करे, तो वह तीसरी भुजा के समांतर होती है।

$$\text{हल: } \triangle ABC \text{ में } \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{--- (i)}$$

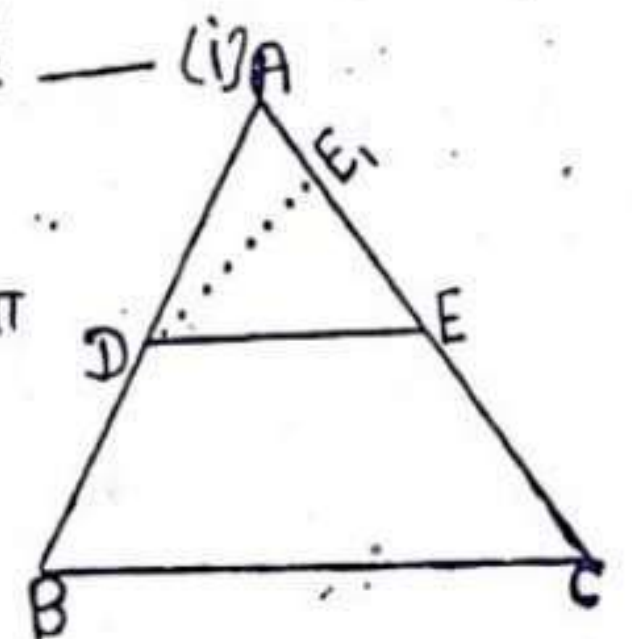
माना $DE \parallel BC$
 BC के समांतर एक रेखा DE' खींचिए।

$$\therefore \frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C} \quad \text{--- (ii)}$$

समी. (i) तथा (ii) से,

$$\frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C} \text{ Proved.}$$

यह तभी संभव है जब E तथा E' एक ही बिंदु हों।



4 → यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के संगत कोण के बराबर हो तथा इन कोणों की अंतर्गत करने वाली भुजाएँ समानुपाती हों, तो दोनों त्रिभुज समरूप होते हैं।

अथवा: → यदि एक त्रिभुज का एक कोण दूसरे त्रिभुज के संगत कोण के बराबर हो तथा कोणों की बनाने वाली भुजाएँ भी संगत भुजाओं के अनुपाती हों तो दोनों त्रिभुज समरूप होंगे।

हल: दो त्रिभुज ABC तथा DEF हैं जिसमें $\angle A = \angle D$ तथा $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ सिद्ध करना है: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

$$\therefore \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF} \quad \text{--- (i)}$$

$$\frac{DP}{DQ} = \frac{DE}{DF} \quad \text{--- (ii)}$$

$$\angle A = \angle D$$

$$\triangle DPQ \sim \triangle DEF$$

$$\Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ Proved.}$$



5 → सिद्ध करें कि यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर हो, तो पहली भुजा का सम्मुख कोण समकोण होता है।

हल: ABC एक त्रिभुज है जिसमें $AC^2 = AB^2 + BC^2$ सिद्ध करना है: $\angle B = 90^\circ$

$$\triangle PQR \text{ में } \angle Q = 90^\circ$$

$$PQ = AB \text{ और } QR = BC$$

$\triangle PQR$ से,

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$\therefore PR^2 = AC^2 [AC = PR]$$

अब $\triangle ABC$ तथा $\triangle PQR$ में,

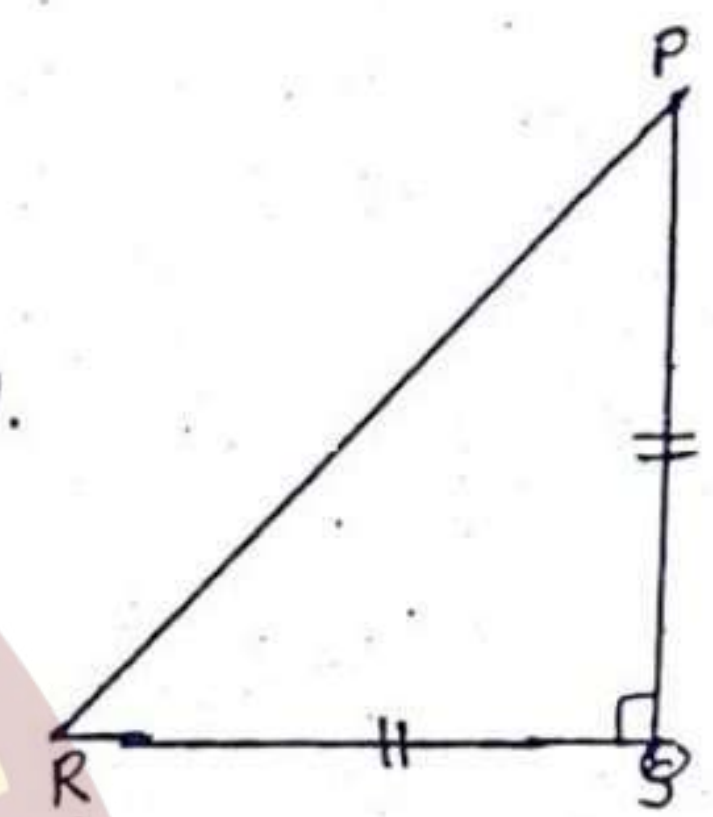
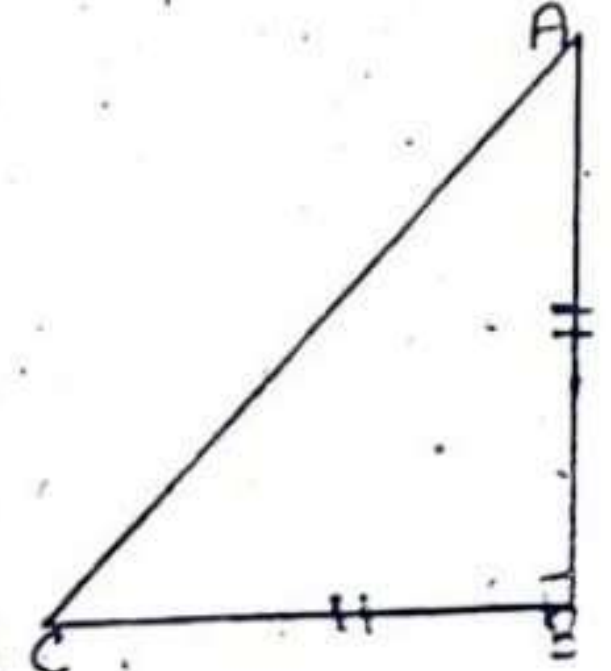
$$AB = PQ, BC = QR, AC = PR$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle PQR$$

$$\angle B = \angle Q$$

$$\angle Q = 90^\circ$$

$$\angle B = 90^\circ \text{ Proved.}$$



6 → सिद्ध कीजिए कि किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गई दो स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ बराबर होती हैं।

अथवा: → सिद्ध करें कि किसी बाह्य बिंदु से वृत्त पर खींची गयी दोनों स्पर्श रेखाओं की लम्बाइयाँ आपस में बराबर होती हैं।

हल: इसमें $AP = AQ$ सिद्ध करना है।

$$\angle OPA = 90^\circ$$

$$\angle OQA = 90^\circ$$

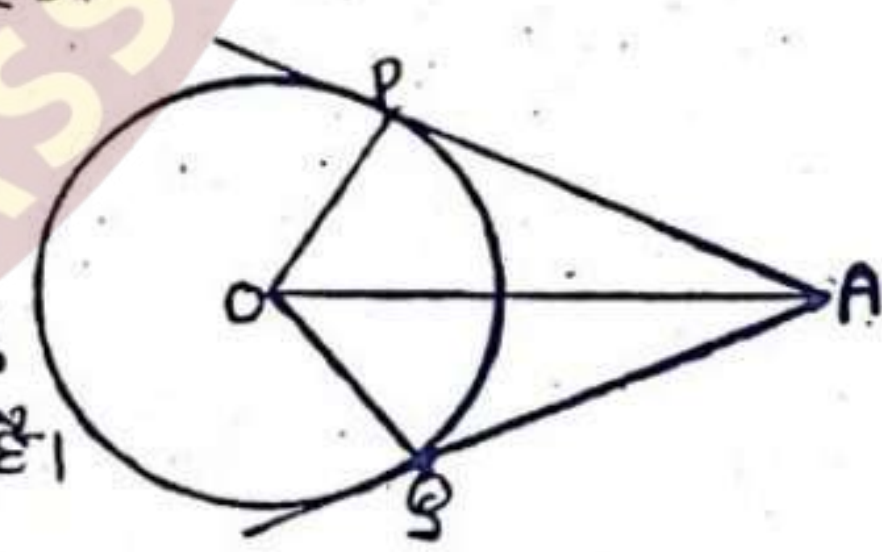
$$\triangle OPA \text{ तथा } \triangle OQA \text{ में,}$$

$$OP = OQ \text{ त्रिज्या है।}$$

$$OA = OA$$

$$\Rightarrow \triangle OPA \cong \triangle OQA [\text{भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता}]$$

$$\therefore AP = AQ \text{ Proved.}$$



7 → सिद्ध कीजिए किसी वृत्त के किसी व्यास के सिरे पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ समांतर होती हैं।

हल: एक वृत्त जिसका केन्द्र O तथा व्यास AB है। l तथा m बिंदु A तथा B पर स्पर्श रेखाएँ हैं।

सिद्ध करना है: $l \parallel m$
 OA त्रिज्या है और l वृत्त पर स्पर्श रेखा है।

$$\therefore \angle 1 = 90^\circ$$

$$\angle 2 = 90^\circ$$

यह दो समांतर रेखाओं के एकान्तर कोण हैं, जहाँ एक तिर्यक रेखा उन्हें काटती है।

$\therefore l \parallel m$ Proved. [किसी व्यास के सिरो पर खींची गई स्पर्श रेखाएँ परस्पर समांतर होती हैं]

8 → यदि d_1, d_2 ($d_2 > d_1$) दो संकेन्द्रीय वृत्तों के व्यास हों और एक वृत्त की जीवा C दूसरे वृत्त पर स्पर्श रेखा हो तो सिद्ध कीजिए कि $d_2^2 = C^2 + d_1^2$

हल: AB स्पर्श रेखा एवं OD त्रिज्या है।

$$\therefore OD \perp AB$$

$\therefore \triangle ODB$ एक समकोण Δ है।

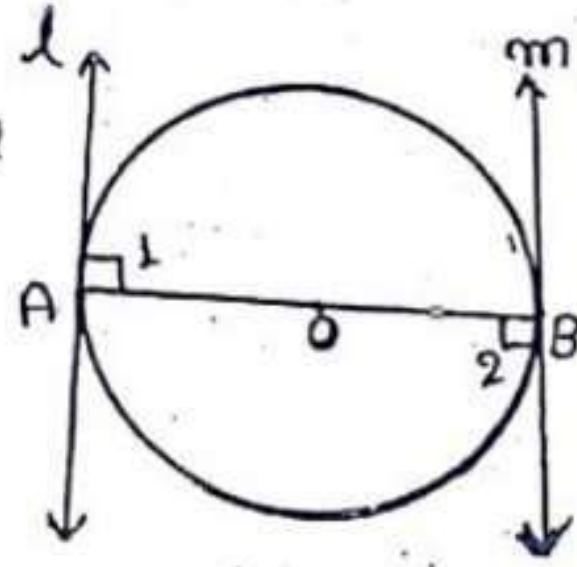
$$\therefore OB^2 = OD^2 + DB^2$$

$$\therefore \left(\frac{1}{2}d_2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}d_1\right)^2 + \left(\frac{1}{2}C\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{d_2^2}{4} = \frac{d_1^2}{4} + \frac{C^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{d_2^2}{4} = \frac{d_1^2 + C^2}{4}$$

$$\Rightarrow d_2^2 = C^2 + d_1^2 \text{ Proved.}$$



9 → सिद्ध करें कि वृत्त की स्पर्श बिंदु से होकर जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

अथवा: → सिद्ध करें कि वृत्त के किसी बिंदु पर स्पर्श रेखा, स्पर्श बिंदु तथा वृत्त का केन्द्र को जोड़ने वाली रेखा अर्थात् वृत्त की त्रिज्या पर लंब होती है।

अथवा: → सिद्ध करें कि वृत्त के किसी बिंदु पर खींची गई स्पर्श-रेखा स्पर्श-बिंदु से जाने वाली त्रिज्या पर लंब होती है।

हल: माना कि AB वृत्त के बिंदु P पर स्पर्श रेखा है।

AB पर P के अतिरिक्त एक अन्य बिंदु Q लिया तथा रेखाखण्ड OQ खींचा। क्योंकि Q स्पर्श रेखा AB पर स्पर्श बिंदु के अतिरिक्त एक अन्य बिंदु है, इसलिए Q वृत्त के बाहर स्थित होगा।



$$\therefore OQ > OP \text{ अर्थात् } OP < OQ$$

क्योंकि केन्द्र बिंदु O की रेखा AB के बिंदुओं से मिलने पर नित्य रेखाखण्ड प्राप्त होता है उनमें से लघुतम रेखाखण्ड वह त्रिज्या है जो कि O से AB पर डाला लंब है।

$$\therefore OP \perp AB \text{ Proved.}$$

प्रश्नावली: 12

1 → दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 4cm और 3cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

हल: वृत्त में,

पहली त्रिज्या (r_1) = 4cm

दूसरी त्रिज्या (r_2) = 3cm

तीसरी " (r_3) = R माना

प्रश्न से,

तीसरे वृत्त का क्षेत्रफल = पहले वृत्त

का क्षेत्रफल + दूसरे वृत्त का क्षेत्रफल

$$\pi r_3^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$\pi R^2 = \pi (r_1^2 + r_2^2)$$

$$R^2 = 4^2 + 3^2$$

$$R^2 = 16 + 9 = 25$$

$$R = \sqrt{25} = 5\text{cm Ans.}$$

2 → दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8cm और 6cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

हल: पहले वृत्त की त्रिज्या (r_1) = 8cm

दूसरी " " " (r_2) = 6cm

तीसरी " " " (R) = R माना

प्रश्न से

तीसरे वृत्त का क्षेत्रफल = पहले वृत्त का क्षेत्रफल + दूसरे वृत्त का क्षेत्रफल

$$\pi R^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$\pi R^2 = \pi (r_1^2 + r_2^2)$$

$$R^2 = 8^2 + 6^2$$

$$R^2 = 64 + 36$$

$$R^2 = 100$$

$$R = \sqrt{100} = 10\text{cm Ans.}$$

3 → दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 12cm तथा 5सेमी हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

हल: पहले वृत्त की त्रिज्या (r_1) = 12cm

दूसरी " " " (r_2) = 5cm

तीसरी " " " (R) = R माना

प्रश्न से

तीसरे वृत्त का क्षेत्रफल = पहले वृत्त का क्षेत्रफल + दूसरे वृत्त का क्षेत्रफल

$$\pi R^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$\pi R^2 = \pi (r_1^2 + r_2^2)$$

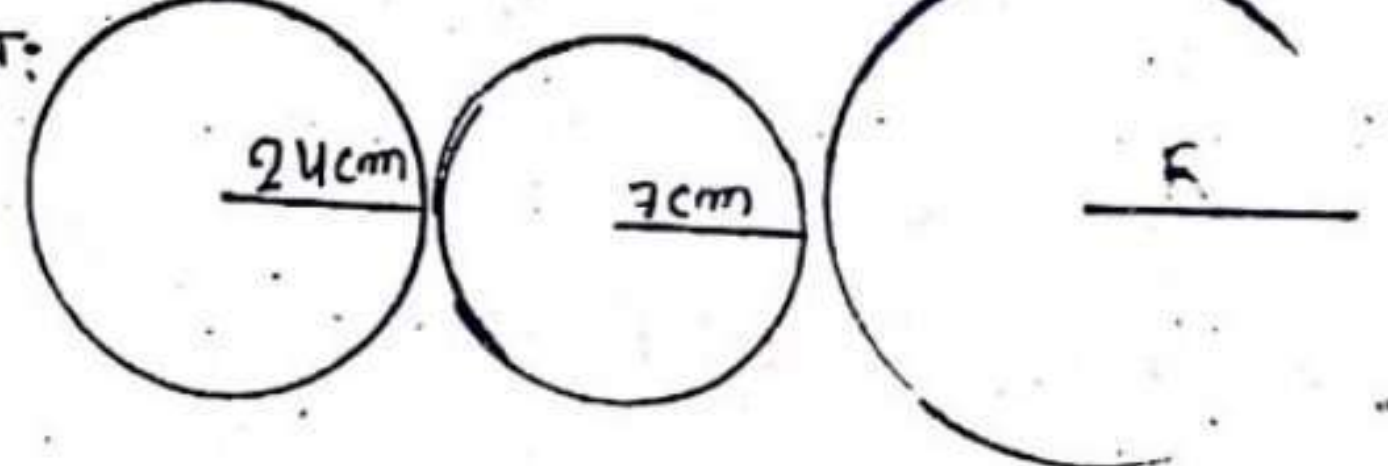
$$R^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25$$

$$R^2 = 169$$

$$R = \sqrt{169} = 13\text{cm Ans.}$$

4 → दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 24cm तथा 7cm हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

हल:



पहले घृत की त्रिज्या (r_1) = 24cm
 दूसरे घृत की त्रिज्या (r_2) = 7cm
 तीसरे घृत की त्रिज्या (R) = R माना

प्रश्न से,

तीसरे घृत का क्षेत्र = पहले घृत का क्षेत्र + दूसरे
 घृत का क्षेत्र

$$\pi R^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$

$$\pi R^2 = \pi (r_1^2 + r_2^2)$$

$$R^2 = 24^2 + 7^2$$

$$R^2 = 576 + 49 = 625$$

$$R = \sqrt{625} = 25 \text{ cm Ans.}$$

5 दो घृतों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8cm तथा
 6cm हैं। उस घृत की त्रिज्या ज्ञात
 कीजिए, जिसकी परिधि इन दोनों
 घृतों की परिधियों के योग के बराबर है।

हल: पहले घृत की त्रिज्या (r_1) = 8cm

दूसरे " " " (r_2) = 6cm

तीसरे " " " (R) = R माना

प्रश्न से,

तीसरे घृत का परिधि = पहले

घृत का परिधि + दूसरे घृत का

$$2\pi R = 2\pi r_1 + 2\pi r_2$$

$$2\pi R = 2\pi (r_1 + r_2)$$

$$R = 8 + 6 = 14 \text{ cm Ans.}$$

6 → दो घृतों की त्रिज्याएँ क्रमशः 14cm
 तथा 7cm हैं। उस घृत की त्रिज्या ज्ञात
 कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों घृतों
 की परिधियों के योग के बराबर है।

हल: पहले घृत की त्रिज्या (r_1) = 14cm

दूसरे " " " (r_2) = 7cm

तीसरे " " " (R) = R माना

प्रश्न से,

तीसरे घृत का परिधि = पहले घृत
 का परिधि + दूसरे घृत का परिधि

$$2\pi R = 2\pi r_1 + 2\pi r_2$$

$$2\pi R = 2\pi (r_1 + r_2)$$

$$R = 14 + 7$$

$$R = 21 \text{ cm Ans.}$$

7 → दो घृतों की त्रिज्याएँ क्रमशः 12cm तथा
 5cm हैं। उस घृत की त्रिज्या ज्ञात कीजिए,
 जिसकी परिधि इन दोनों की परिधियों के
 योग के बराबर है।

हल: पहले घृत की त्रिज्या (r_1) = 12cm

दूसरे " " " (r_2) = 5cm

तीसरे " " " (R) = R माना

प्रश्न से,

तीसरे घृत का परिधि = दोनों घृतों
 का योग

$$2\pi R = 2\pi r_1 + 2\pi r_2$$

$$2\pi R = 2\pi (r_1 + r_2)$$

$$R = 12 + 5$$

$$R = 17 \text{ cm Ans.}$$

8 → दो घृतों की त्रिज्याएँ क्रमशः 19सेमी
 और 9सेमी हैं। उस घृत की त्रिज्या ज्ञात
 कीजिए जिसकी परिधि इन दोनों घृतों
 की परिधियों के योग के बराबर है।

हल: पहले घृत की त्रिज्या (r_1) = 19cm

दूसरे " " " (r_2) = 9cm

तीसरे " " " (R) = R माना

प्रश्न से,

तीसरे घुत्त का परिधि = दोनों परिधियों का योग

$$2\pi R = 2\pi r_1 + 2\pi r_2$$

$$2\pi R = 2\pi(r_1 + r_2)$$

$$R = 19 + 9 = 28 \text{ cm Ans.}$$

9 → एक घुत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 22 cm है।

अथवा: — 22 cm परिधि वाले घुत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: घुत्त की परिधि = 22 cm

$$\Rightarrow 2\pi r = 22$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r = 22$$

$$\Rightarrow \frac{44r}{7} = \frac{22}{1}$$

$$\Rightarrow 44r = 22 \times 7$$

$$r = \frac{22 \times 7}{44 \times 2}$$

$$r = \frac{7}{2} \text{ cm}$$

घुत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \times \pi r^2$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}$$

$$= \frac{77}{8} = 9.625 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$



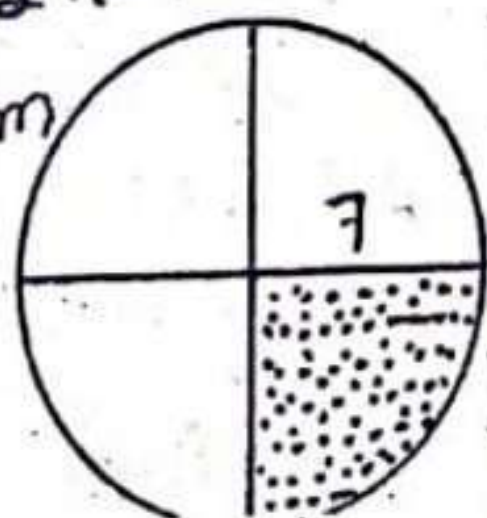
10 → एक घुत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसकी परिधि 44 सेमी है।

अथवा: → 44 cm परिधि वाले घुत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: घुत्त की परिधि = 44 cm

$$\Rightarrow 2\pi r = 44$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$$



$$\Rightarrow \frac{44r}{7} = 44$$

$$\Rightarrow \frac{r}{7} = 1 \Rightarrow r = 7 \text{ cm}$$

घुत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \times \pi r^2$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 5.5 \times 7 = 38.5 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

11 → 66 सेमी परिधि वाले घुत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

अथवा: → एक घुत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 66 सेमी है।

हल: घुत्त की परिधि = 66 cm

$$\Rightarrow 2\pi r = 66$$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 22}{7} \times r = 66$$

$$\Rightarrow \frac{44r}{7} = 66$$

$$44r = 66 \times 7$$

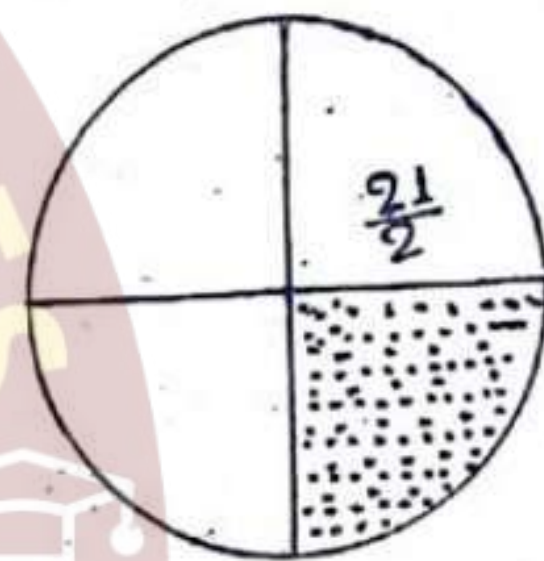
$$r = \frac{66 \times 7}{44}$$

घुत्त के चतुर्थांश का क्षेत्रफल = $\frac{1}{4} \times \pi r^2$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{66}{4} \times \frac{66}{4}$$

$$= \frac{11 \times 3 \times 21}{8} = \frac{693}{8} = 86.625$$

$$= 86.625 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$



12 → उस घुत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका त्रिज्या 7 cm है।

अथवा: → 7 cm त्रिज्या वाले घुत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: घुत्त का त्रिज्या (r) = 7 cm

$$= \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 22 \times 7 = 154 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

13 → उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें, जिसका व्यास 14 सेमी है।

अथवा: → 14 सेमी व्यास वाले वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: वृत्त का व्यास (d) = 14 cm

$$\therefore \text{त्रिज्या (r)} = \frac{d}{2} = \frac{14}{2}$$

$$r = 7 \text{ cm}$$

$$\therefore \text{क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 22 \times 7 = 154 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

14 → 7 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त का परिधि ज्ञात करें।

अथवा: → उस वृत्त का परिधि ज्ञात करें, जिसका त्रिज्या 7 सेमी है।

हल: वृत्त का त्रिज्या (r) = 7 cm

$$\therefore \text{परिधि} = 2\pi r$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$$

$$= 44 \text{ cm Ans.}$$

15 → किसी वृत्त का क्षेत्रफल निकालें यदि उसकी परिधि 22 सेमी है।

हल: वृत्त का परिधि = 22 cm

$$2\pi r = 22 \quad \text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times r = 11$$

$$\Rightarrow \frac{22}{7} = 1$$

$$\Rightarrow 22 = 7$$

$$r = \frac{7}{2}$$

16 → किसी वृत्त का क्षेत्रफल निकालें यदि परिधि 44 सेमी है।

हल: वृत्त की परिधि = 44 cm

$$2\pi r = 44$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$$

$$\frac{44r}{7} = 44$$

$$\frac{r}{7} = 1$$

$$r = 7 \text{ cm}$$

$$\text{वृत्त का क्षेत्रफल} = \pi r^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$$

$$= 22 \times 7$$

$$= 154 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

17 → किसी वृत्त परिधि निकालें यदि उसकी क्षेत्रफल 154 cm² है। व्यास भी बताएं।

हल: वृत्त का क्षेत्रफल = 154 cm²

$$\pi r^2 = 154$$

$$\frac{22}{7} r^2 = 154$$

$$22r^2 = 154 \times 7$$

$$r^2 = \frac{154 \times 7}{22}$$

$$r^2 = 7 \times 7$$

$$r = \sqrt{7 \times 7} = 7 \text{ cm}$$

$$\text{वृत्त का परिधि} = 2\pi r$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7$$

$$= 2 \times 22$$

$$= 44 \text{ cm Ans.}$$

$$\text{वृत्त का व्यास (d)} = 2r$$

$$= 2 \times 7 = 14 \text{ cm}$$

Ans.

18 → एक अर्धवृत्त चाँद की परिधि 36 cm है उसका व्यास निकालें।

हल: चाँद की परिधि = 36 cm

$$\pi r + 2r = 36$$

$$r(\pi + 2) = 36$$

$$r\left(\frac{22}{7} + 2\right) = 36$$

$$r\left(\frac{22+14}{7}\right) = 36$$

$$r \times \frac{36}{7} = 36$$

$$\frac{r}{7} = 1$$

$$r = 7 \text{ cm}$$



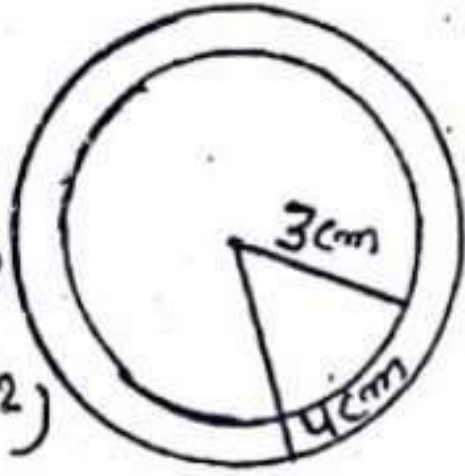
$$\text{व्यास (d)} = 2r$$

$$d = 2 \times 7$$

$$d = 14 \text{ cm Ans.}$$

19 → किसी वलय की बाहरी त्रिज्या 4cm और भीतरी त्रिज्या 3cm हो, तो उसका क्षेत्रफल निकालें।

हल: बाहरी त्रिज्या (R) = 4cm
भीतरी त्रिज्या (r) = 3cm
वलय का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

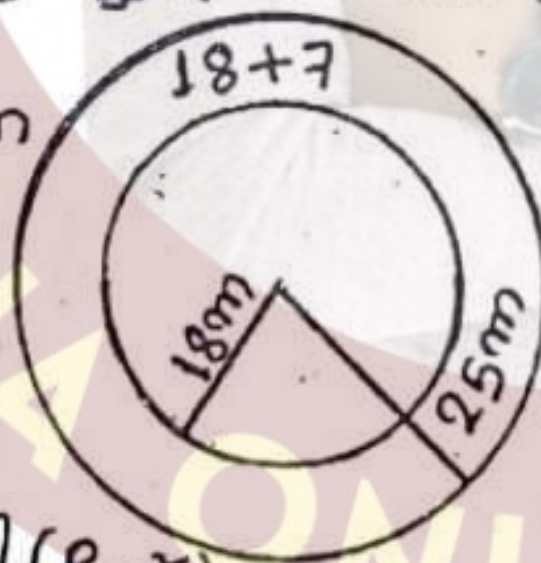


$$\begin{aligned} &= \pi(R+r)(R-r) \\ &= \frac{22}{7}(4+3)(4-3) \\ &= \frac{22}{7} \times 7 \times 1 = 22 \text{ cm}^2 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

20 → किसी वलय की बाहरी त्रिज्या 25m और भीतरी त्रिज्या 18m हो तो उसका क्षेत्रफल निकालें।

अथवा → 18m त्रिज्या वाले वृत्ताकार पार्क के बाहर से चारों ओर (तरफ) 7m चौड़ा एक रास्ता है।
रास्ता का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: बाहरी त्रिज्या (R) = 25m
भीतरी त्रिज्या (r) = 18m
वलय का क्षेत्रफल = $\pi(R^2 - r^2)$

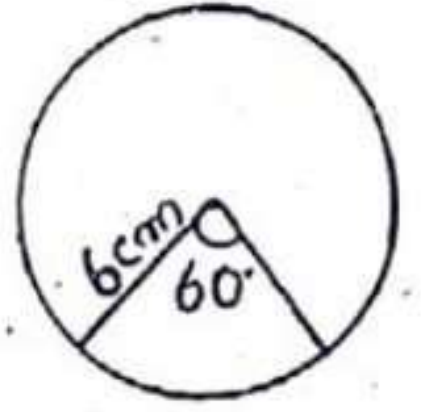


$$\begin{aligned} &= \pi(R+r)(R-r) \\ &= \frac{22}{7}(25+18)(25-18) \\ &= \frac{22}{7} \times 43 \times 7 \end{aligned}$$

$$= 22 \times 43 = 946 \text{ m}^2 \text{ Ans.}$$

21 → एक 6cm त्रिज्या वाले त्रिज्याखंड का परिमाण निकालें यदि त्रिज्याखंड का कोण 60° है।

हल: त्रिज्या (r) = 6cm
कोण (θ) = 60°



त्रिज्याखंड का परिमाण

$$\begin{aligned} &= 2r + \frac{\pi r \theta}{180^\circ} \\ &= 2 \times 6 + \frac{22 \times 6 \times 60^\circ}{7 \times 180^\circ} \\ &= 12 + \frac{44}{7} \times 6.285 \end{aligned}$$

$$= 12 + 6.285 = 18.285 \text{ या } 18.29 \text{ cm Ans.}$$

22 → 42cm व्यास वाले त्रिज्याखंड का कोण 120° है तो त्रिज्याखंड का परिमाण प्राप्त करें।

हल: व्यास (d) = 42
त्रिज्या (r) = $\frac{d}{2}$

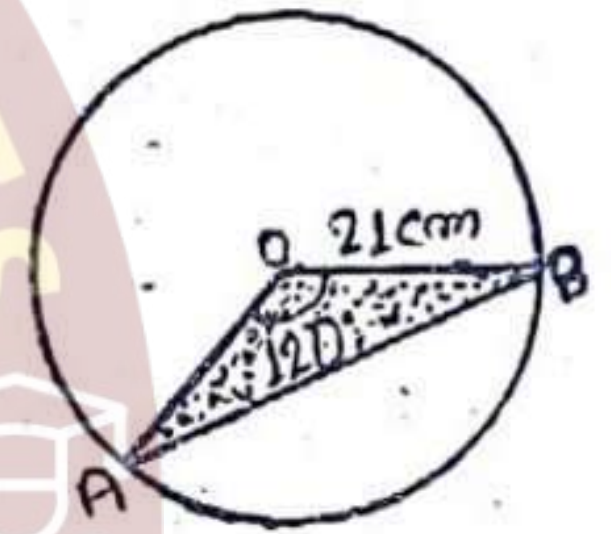
$$r = \frac{42}{2} = 21$$

$$r = 21$$

$$\theta = 120^\circ$$

त्रिज्याखंड AB का परिमाण = $\frac{\pi r \theta}{180^\circ}$

$$= \frac{22 \times 21 \times 120^\circ}{7 \times 180^\circ} = 22 \times 2 = 44 \text{ cm Ans.}$$

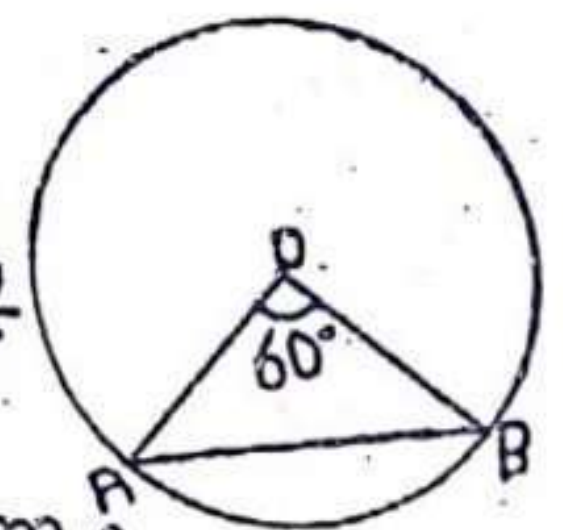


23 → त्रिज्या 21cm वाले वृत्त का एक-चाप छेद पर 60° का कोण अंतरित करता है तो चाप की लम्बाई ज्ञात करें।

हल: त्रिज्या (r) = 21cm
θ = 60°

चाप की लम्बाई (AB) = $\frac{\pi r \theta}{180^\circ}$

$$= \frac{22 \times 21 \times 60^\circ}{7 \times 180^\circ} = 22 \text{ cm Ans.}$$



24 → 6 सेमी त्रिज्या वाले वृत्त के एक त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल निकालें जिसका केन्द्रीय कोण 30° है।

29 → किसी कार के प्रत्येक पहिये का व्यास 80cm है। यदि यह कार 66km प्रति घंटे की चाल से चल रही है, तो 10 मिनट में प्रत्येक पहिया कितने चक्कर लगाती है?

हल: कार के पहिया का व्यास (d) = 80cm

" " " " त्रिज्या (r) = $\frac{d}{2}$

$r = \frac{80}{2} = 40\text{cm}$

कार के पहिये की परिधि = $2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 40 = \frac{1760}{7}\text{cm}$

कार 1 घंटे या 60 मिनट में दूरी तय करी = 66km

" 1 मिनट " " " " = $\frac{66}{60}$

" 10 मिनट " " " " = $\frac{66}{60} \times 10$

$= 11\text{km या } 1100000\text{cm} [1\text{km} = 100000\text{cm}]$

10 मिनट में पहिया चक्कर लगाया

$= 1100000 \div \frac{1760}{7}$

$= 1100000 \times \frac{7}{1760}$

$= 625 \times 7 = 4375\text{ चक्कर Ans.}$

30 → 2 त्रिज्या वाले वृत्त और 2 भुजा वाले वर्ग के क्षेत्रफलों का अनुपात निकाले।

हल: वृत्त का त्रिज्या (r) = 2

वर्ग का भुजा (a) = 2

क्षे. का अनुपात = $\frac{\text{वृत्त का क्षेत्र.}}{\text{वर्ग का क्षेत्र.}} = \frac{\pi r^2}{a^2}$

$= \frac{\pi 2^2}{2^2} = \frac{\pi}{1}\text{ या } \pi:1\text{ Ans.}$

31 → एक आयताकार कागज का टुकड़ा है जिसमें AB = 18cm और BC = 14cm है। इस कागज के टुकड़े से BC को व्यास मानकर अर्ध वृत्ताकार टुकड़ा काट लिया जाता है। कागज के शेष भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: आयताकार कागज में,

लम्बाई (l) = 18cm

चौड़ाई (b) = 14cm

अर्धवृत्त में,

व्यास (BC) = 14cm

त्रिज्या (r) = $\frac{BC}{2} = \frac{14}{2} = 7\text{cm}$

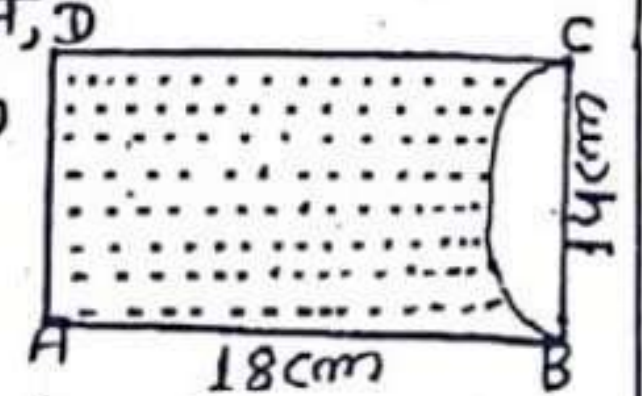
प्रश्न से,

कागज के शेष भाग का क्षेत्र. = आयताकार कागज का क्षेत्र. - अर्धवृत्त का क्षेत्र.

$= l \times b - \frac{1}{2} \pi r^2$

$= 18 \times 14 - \frac{1}{2} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7$

$= 252 - 77 = 175\text{cm}^2\text{ Ans.}$



32 → एक 24मीटर भुजा वाले समबाहु त्रिभुजीय आकार में दान के तीनो शीर्षों पर तीन छोड़ा इस तरह से बाँधे जाते हैं कि वे आपस में एक-दूसरे को ठीक छू सकें। मैदान का कितना भाग वे नहीं चर सकते।

हल: समबाहु Δ में,

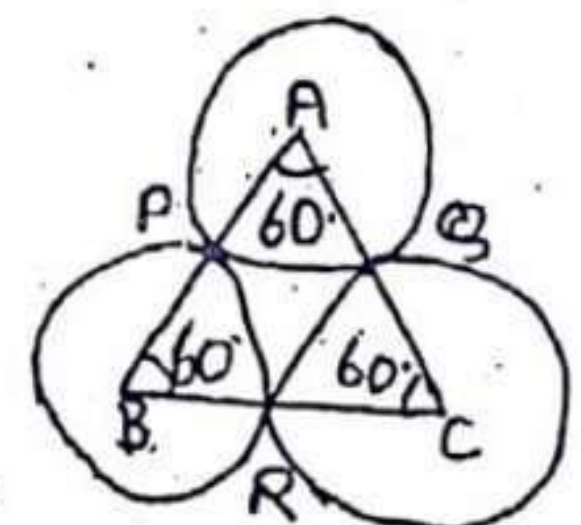
भुजा (a) = 24m

त्रिज्या खंड APQ में,

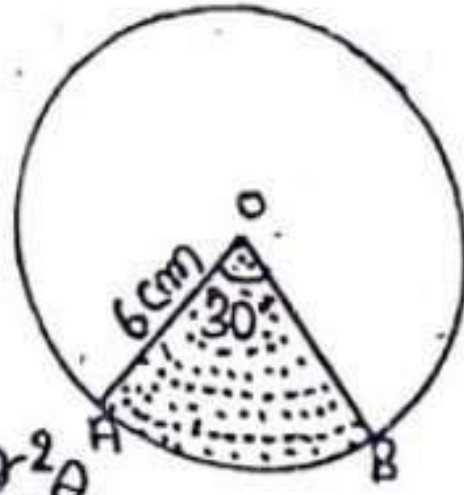
त्रिज्या (r) = 12m

$\theta = 60^\circ$

प्रश्न से,



हल: त्रिज्या (r) = 6cm
 $\theta = 30^\circ$
 क्षेत्र = ?
 सूत्र से,



$$\begin{aligned} \text{त्रिज्याखंड का क्षेत्र} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} \\ &= \frac{22 \times 6 \times 6 \times 30^\circ}{7 \times 360^\circ} = \frac{66}{7} = 9.42 \\ &= 9.42 \text{ cm}^2 \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$

25 → त्रिज्या 4cm वाले एक वृत्त के त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसका कोण 30° है (π = 3.14 लीजिए)

हल: त्रिज्या (r) = 4cm
 $\theta = 30^\circ$
 क्षेत्र = ?
 सूत्र से,

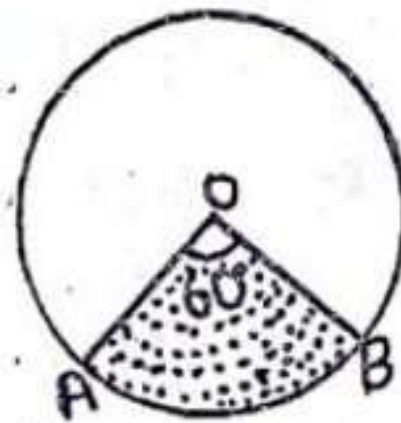


$$\begin{aligned} \text{त्रिज्याखंड का क्षेत्र} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} \\ &= \frac{3.14 \times 4 \times 4 \times 30^\circ}{360^\circ} = \frac{3.14 \times 4}{3} \\ &= \frac{12.56}{3} = 4.186 \\ &= 4.186 \text{ या } 4.19 \text{ cm}^2 \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$

26 → 6cm त्रिज्या वाले एक वृत्त के एक त्रिज्याखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका कोण 60° है।

हल: त्रिज्या (r) = 6cm
 $\theta = 60^\circ$

त्रिज्याखंड का क्षेत्र = $\frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$

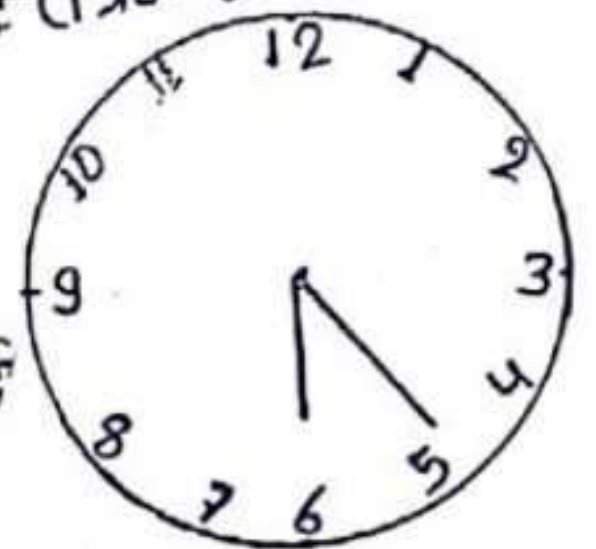


$$\begin{aligned} &= \frac{22 \times 6 \times 6 \times 60^\circ}{7 \times 360^\circ} = \frac{132}{7} = 18.85 \\ &= 18.85 \text{ cm}^2 \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$

27 → एक घड़ी की मिनट की सूई, जिसकी लम्बाई 14cm है। सूई द्वारा 5मिनट में रचित क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: मिनट की सूई की लम्बाई (त्रिज्या) r = 14cm

∴ 60मिनट में सूई कोण बनाई = 360°



1मिनट में सूई कोण बनाई = $\frac{360^\circ}{60} = 6^\circ$

5मिनट में सूई कोण बनाई = $5 \times 6^\circ$
 $\theta = 30^\circ$

$$\begin{aligned} \text{5मिनट में रचित क्षेत्रफल} &= \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ} \\ &= \frac{22 \times 14 \times 14 \times 30^\circ}{7 \times 360^\circ} = \frac{22 \times 7}{3} \\ &= \frac{154}{3} = 51.33 \text{ cm}^2 \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$

28 → एक साइकिल 5,000 चक्करों में 11 किमी की दूरी तय करती है। पहिये का व्यास ज्ञात करें।

अथवा: → 11km दूरी तय करने में एक साइकिल को 5000 चक्कर लगाना पड़ता है। पहिये का व्यास ज्ञात कीजिए।

हल: दूरी = 11km = 1100000cm [1km = 100000cm]

5000 चक्कर में तय की गई दूरी = 1100000

$$\begin{aligned} 1 \text{ " " " " " " } &= \frac{1100000}{5000} \\ \therefore \text{वृत्त का परिधि} &= 220 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\pi r &= 220 & r &= \frac{220 \times 7}{22} = 35 \\ 2 \times \frac{22}{7} r &= 220 & & \\ 44r &= 220 \times 7 & \text{पहिये का व्यास (d)} &= 2r = 2 \times 35 = 70 \text{ cm} \quad \text{Ans.} \end{aligned}$$

मैंदान का नहीं चर सकने वाले भाग का क्षेत्र = समबाहु Δ का क्षेत्र - 3 त्रिज्याखंड का क्षेत्र

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 - 3 \times \frac{\pi r^2 \theta}{360^\circ}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \times 24^2 \times 24 - \frac{22 \times 12 \times 12 \times 60}{7 \times 120^\circ}$$

$$= \sqrt{3} \times 6 \times 24 - \frac{1584}{7} = 226.285$$

$$= 1.732 \times 144 - 226.285$$

$$= 249.408 - 226.285$$

$$= 23.123 \text{ m}^2 \text{ Ans.}$$

33 → एक पहिर का व्यास 4 cm है तो 400 चक्करों में वह कितनी दूरी तय करेगी ?

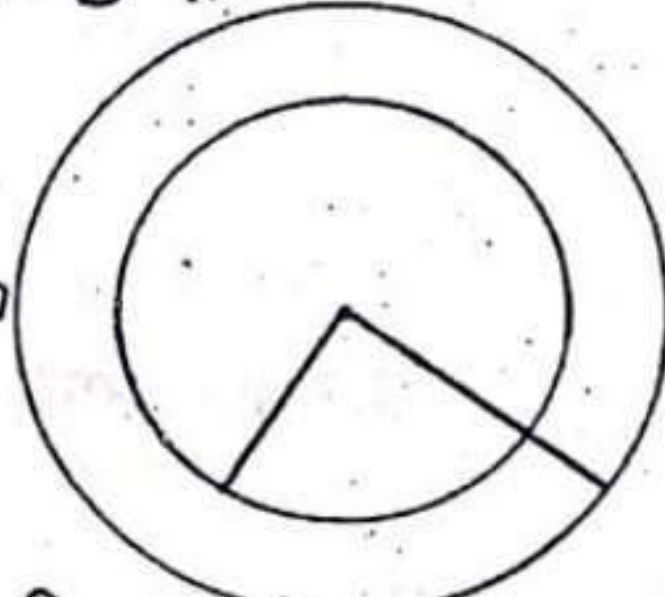
हल: पहिर का व्यास (d) = 4 cm
त्रिज्या (r) = $\frac{d}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}$
घृत का परिधि = $2\pi r = 2\pi \times 2 = 4\pi$

एक चक्कर में चली गई दूरी = 4π
∴ 400 चक्कर में चली गई दूरी = $4\pi \times 400 = 1600\pi \text{ Ans.}$

34 → किसी घुत्ताकार समान चौड़ाई वाले रास्ते का बाहरी घेरा 20π मी. और भीतरी घेरा 18π मी. है तो रास्ते की चौड़ाई निकालें।

हल: बाहरी घृत का परिधि = $20\pi \text{ m}$
 $2\pi R = 20\pi \times 10$
 $R = 10 \text{ m}$

भीतरी घृत का परिधि = $18\pi \text{ m}$



$$2\pi r = 18\pi \times 9$$

$$r = 9 \text{ m}$$

$$\therefore \text{रास्ते की चौड़ाई} = R - r = 10 - 9 = 1 \text{ m Ans.}$$

प्रश्नावली: 13

1 → एक घनाभ के छोरी की लम्बाई क्रमशः 3 सेमी, 4 सेमी और 12 सेमी हैं, तो घनाभ के विकर्ण की लम्बाई ज्ञात करें।

हल: घनाभ के छोरी की लम्बाई (l) = 3 cm
" " " चौ. (b) = 4 cm
" " " ऊँ. (h) = 12 cm

$$\text{घनाभ का विकर्ण} = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{9 + 16 + 144}$$

$$= \sqrt{169} = 13 \text{ cm Ans.}$$

2 → दो घनों, जिनमें से प्रत्येक का आयतन 64 cm^3 है, के संलग्न फलकों को मिलाकर एक ठोस बनाया जाता है। इससे प्राप्त घनाभ का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: घन का आयतन = 64 cm^3

$$a^3 = 64$$

$$a = \sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4 \times 4 \times 4} = 4 \text{ cm}$$

घनाभ में

$$\text{लंबाई (l)} = 4 + 4 = 8 \text{ cm}$$

$$\text{चौ. (b)} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{ऊँ. (h)} = 4 \text{ cm}$$

$$\text{क्षे.} = ?$$

सूत्र से,

$$\text{घनाभ का क्षेत्र} = 2(lb + bh + hl)$$

$$= 2(8 \times 4 + 4 \times 4 + 4 \times 8)$$

$$= 2(32 + 16 + 32) = 2 \times 80 = 160 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

3 → 8cm मुजा वाले दो घन धराधर से जोड़ दिये जाये हैं। परिणामी घनाभ का पृष्ठ क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात करें।

हल: घन का मुजा (a) = 8cm

घनाभ में,

$$\text{लं. (l)} = 8 + 8 = 16\text{cm}$$

$$\text{चौ. (b)} = 8\text{cm}$$

$$\text{ऊँ. (h)} = 8\text{cm}$$

$$\text{क्षे.} = ?$$

$$\text{आयतन} = ?$$

सूत्र से,

$$\text{घनाभ का पृष्ठी क्षे.} = 2(lb + bh + hl)$$

$$= 2(16 \times 8 + 8 \times 8 + 8 \times 16)$$

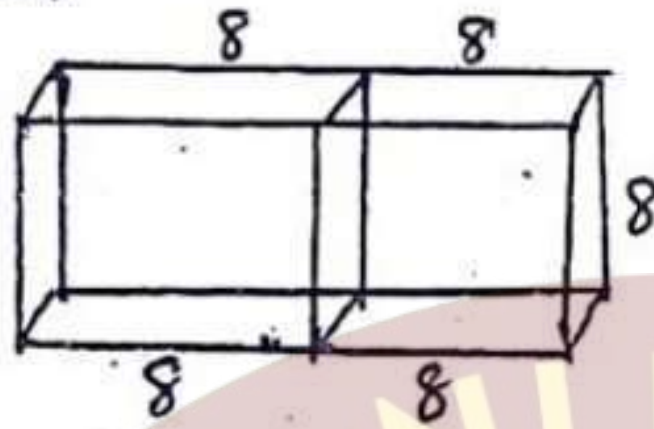
$$= 2(128 + 64 + 128) = 2 \times 320 = 640\text{cm}^2$$

Ans.

$$\text{घनाभ का आयतन} = lbh = 16 \times 8 \times 8$$

$$= 1024\text{cm}^3$$

Ans.



4 → एक घनाभ की लंबाई, चौड़ाई तथा ऊँचाई क्रमशः 10cm, 8cm और 6cm हैं, तो इसका आयतन निकाले एवं विकर्ण ज्ञात करें तथा पार्श्व या एक पृष्ठीय क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

हल: घनाभ की लं. (l) = 10cm, चौड़ाई (b) = 8cm
ऊँ. (h) = 6cm

$$\text{घनाभ का आयतन} = lbh = 10 \times 8 \times 6$$

$$= 480\text{cm}^3$$

Ans.

$$\text{घनाभ का विकर्ण} = \sqrt{l^2 + b^2 + h^2}$$

$$= \sqrt{10^2 + 8^2 + 6^2} = \sqrt{100 + 64 + 36}$$

$$= \sqrt{200} = \sqrt{2 \times 10 \times 10} = 10\sqrt{2}\text{cm}$$

Ans.

$$\text{घनाभ का पार्श्व पृ. क्षे.} = 2h(l + b)$$

$$= 2 \times 6(10 + 8) = 12 \times 18 = 216\text{cm}^2$$

Ans.

5 → एक घन का किनारा 10cm है तो घन का आयतन, पृष्ठी क्षेत्रफल तथा पार्श्व पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: घन का किनारा (a) = 10cm

$$\text{घन का आयतन} = a^3 = 10 \times 10 \times 10$$

$$= 1000\text{cm}^3$$

Ans.

$$\text{पृ. क्षे.} = 6a^2 = 6 \times 10 \times 10$$

$$= 600\text{cm}^2$$

Ans.

$$\text{पार्श्व पृ. क्षे.} = 4a^2 = 4 \times 10 \times 10$$

$$= 400\text{cm}^2$$

Ans.

6 → एक घन का आयतन 1331 घन मीटर है। इसकी एक कोर कितनी है तथा विकर्ण क्या है?

हल: घन का आयतन = 1331 m³
 $a^3 = 1331$

$$a = \sqrt[3]{1331} = \sqrt[3]{11 \times 11 \times 11} = 11\text{m}$$

∴ घन का किनारा (a) = 11m

Ans.

$$\text{घन का विकर्ण} = a\sqrt{3} = 11\sqrt{3}\text{m}$$

Ans.

7 → एक घन का पूर्ण पृष्ठ 1014 वर्ग सेंमी है, तो इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: घन का पूर्ण पृ. क्षे. = 1014 वर्ग सेंमी

$$6a^2 = 1014$$

$$a^2 = \frac{1014}{6} = 169$$

$$a = \sqrt{169} = 13\text{cm}$$

$$\text{घन का आयतन} = a^3 = 13 \times 13 \times 13$$

$$= 2197\text{cm}^3$$

Ans.

8 → यदि घन का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल 150 वर्ग मीटर हो, तो इसका आयतन ज्ञात करें।

हल: घन का कुल पृ. क्षे. = 150 cm^2
 $6a^2 = 150$
 $a^2 = 25$
 $a = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$

घन का आयतन = $a^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125 \text{ cm}^3$ Ans.

9 → 3.5 cm त्रिज्या वाले अर्द्धगोले का लकड़ पृष्ठ का क्षेत्रफल निकालें?

हल: अर्द्धगोला का त्रिज्या (r) = 3.5 cm
 क्षे. = ?
 सूत्र से,

अर्द्धगोला का लकड़ पृ. क्षे. = $2\pi r^2$
 $= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5$
 $= 2 \times 22 \times 3.5 \times 0.5 = 77.00$
 $= 77 \text{ cm}^2$ Ans.

10 → एक अर्द्धगोलीय कटोरे का आंतरिक व्यास 20 सेमी है। उसका धारिता प्राप्त कीजिए।

हल: अर्द्धगोला का व्यास (d) = 20 cm
 त्रिज्या (r) = $\frac{d}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$

अर्द्धगोला का धारिता (आयतन) = $\frac{2}{3}\pi r^3$
 $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10 \times 10 = \frac{44000}{3}$
 $= 2095.23 \text{ cm}^3$ Ans.

11 → यदि किसी अर्द्धगोले की त्रिज्या 7 सेमी हो, तो अर्द्धगोले का आयतन, लकड़ पृष्ठ तथा संपूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल निकालें।

हल: अर्द्धगोला का त्रिज्या (r) = 7 cm

अर्द्धगोला का आयतन = $\frac{2}{3}\pi r^3$
 $= \frac{2}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 7 = \frac{2156}{3}$
 $= 718.666$ या 718.67 cm^3 Ans.

अर्द्धगोला का लकड़ पृ. क्षे. = $2\pi r^2$
 $= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 308 \text{ cm}^2$ Ans.

अर्द्धगोला का संपूर्ण पृ. क्षे. = $3\pi r^2$
 $= 3 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 462 \text{ cm}^2$ Ans.

12 → यदि किसी गोले की त्रिज्या 3.5 मीटर हो, तो उसका आयतन निकालें।

हल: गोला का त्रिज्या (r) = 3.5 m
 गोला का आयतन = $\frac{4}{3}\pi r^3$
 $= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5 \times 3.5 = \frac{539.000}{3}$
 $= 179.666$
 $= 179.67 \text{ m}^3$ Ans.

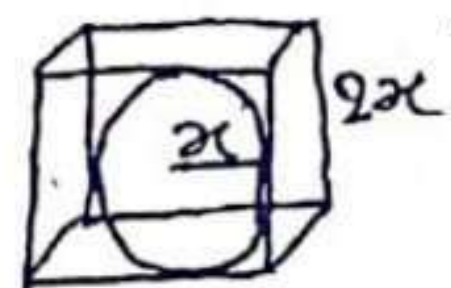
13 → उस गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल निकालें जिसका व्यास 14 सेमी है।

अथवा: → गोले के पृष्ठ का क्षेत्रफल क्या होगा, यदि त्रिज्या 7 cm है।

हल: गोला का व्यास (d) = 14 cm
 त्रिज्या (r) = $\frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$
 गोला का पृ. क्षे. = $4\pi r^2$
 $= 4 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 = 616 \text{ cm}^2$ Ans.

14 → यदि घन गोला के परिगत हो, तो घन और गोले के आयतन का अनुपात क्या होगा?

हल: घन का भुजा (a) = 2a
 गोला का त्रिज्या (r) = a

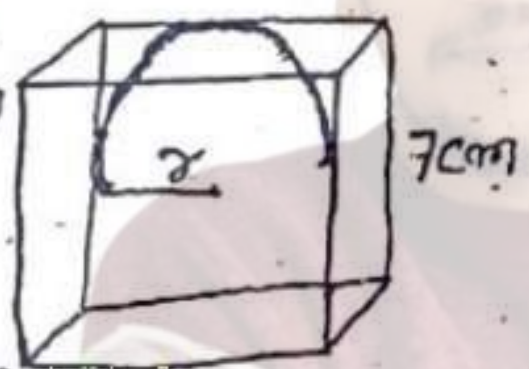


प्रश्न से,

$$\begin{aligned} \text{अनुपात} &= \frac{\text{घन का आयतन}}{\text{गोला का आयतन}} = \frac{\alpha^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} \\ &= \frac{(2x)^3}{\frac{4}{3}\pi x^3} = 8x^3 \div \frac{4\pi x^3}{3} = 8x^3 \times \frac{3}{4\pi x^3} \\ &= \frac{6}{\pi} \text{ या } 6:\pi \text{ Ans.} \end{aligned}$$

15 → भुजा 7cm वाले एक घनाकार ब्लॉक के उपर एक अर्द्धगोल रखा हुआ है। अर्द्धगोले का अधिकतम व्यास क्या हो सकता है? इस प्रकार होने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: घन का भुजा (a) = 7cm
अर्द्धगोले का अधिकतम व्यास (d) = 7cm
त्रिज्या (r) = $\frac{7}{2}$ cm



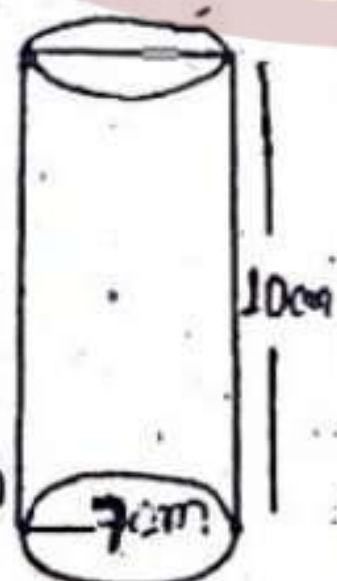
प्रश्न से,

$$\begin{aligned} \text{ठोस का पृ.क्षे.} &= 6a^2 - \pi r^2 + 2\pi r^2 \\ &= 6a^2 + \pi r^2 = 6 \times 7 \times 7 + \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2} \\ &= 294 + 38.5 = 332.5 \text{ cm}^2 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

16 → किसी छेदनाकार पात्र की ऊँचाई 10cm है और उसकी आधार की त्रिज्या 7cm है तो उस पात्र की धारिता क्या है?

हल: छेदनाकार पात्र में,
ऊँचाई (h) = 10cm
त्रिज्या (r) = 7cm

$$\begin{aligned} \text{छेदनाकार पात्र की धारिता} &= \pi r^2 h \\ &= \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 10 = 1540 \text{ cm}^3 \text{ Ans.} \end{aligned}$$



17 → एक छेदनाकार आधार की परिधि 132 सेमी, उसकी ऊँचाई 25सेमी. है, तो छेदनाकार आयतन ज्ञात कीजिए।

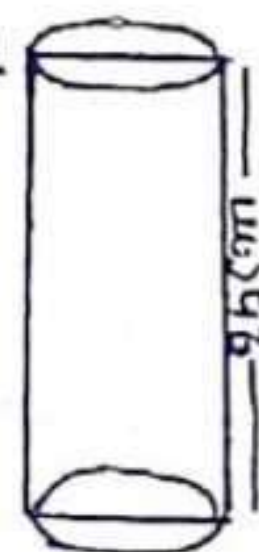
हल: छेदनाकार आधार की परिधि = 132

$$2\pi r = 132$$

$$\frac{2 \times 22}{7} r = 132$$

$$r = 21 \text{ cm}$$

$$\text{ऊँ. (h)} = 25 \text{ cm}$$



$$\text{छेदनाकार आयतन} = \pi r^2 h$$

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 25$$

$$= 34650 \text{ cm}^3 \text{ Ans.}$$

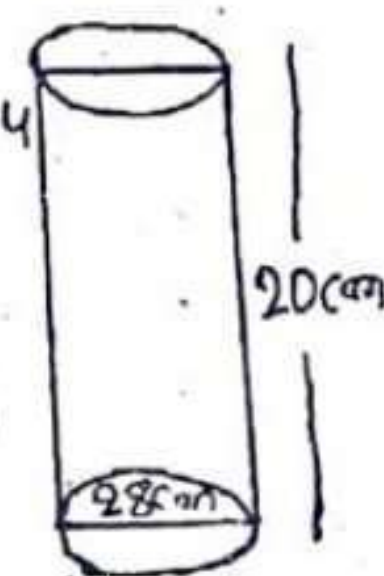
18 → एक छेदनाकार व्यास 28सेमी और ऊँचाई 20सेमी है, तो छेदनाकार पृष्ठीय तथा आयतन ज्ञात करें।

हल: छेदनाकार व्यास (d) = 28cm

त्रिज्या (r) = $\frac{d}{2} = \frac{28}{2}$

$$r = 14 \text{ cm}$$

ऊँचाई (h) = 20cm



$$\text{छेदनाकार पृ.क्षे.} = 2\pi r h$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 14 \times 20 = 1760 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

$$\begin{aligned} \text{छेदनाकार आयतन} &= \pi r^2 h = \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 20 \\ &= 12320 \text{ cm}^3 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

19 → 70 डेसीमीटर ऊँचे तथा 28मीटर व्यास वाले एक समछेदनाकार आयतन ज्ञात कीजिए।

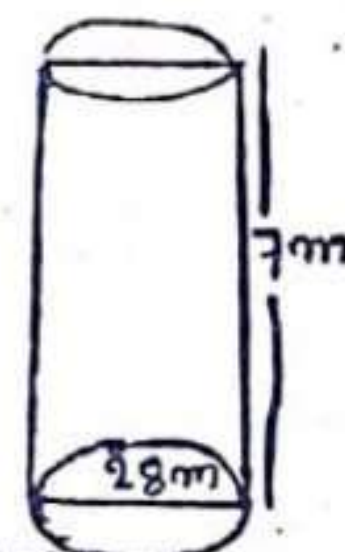
हल: समछेदनाकार में,

$$\text{ऊँ. (h)} = 70 \text{ डेसीमीटर या}$$

$$\frac{70}{10} = 7$$

$$\text{व्यास (d)} = 28 \text{ m}$$

$$\text{त्रिज्या (r)} = \frac{d}{2} = \frac{28}{2} = 14 \text{ m}$$



$$\text{समछेदनाकार आयतन} = \pi r^2 h$$

$$= \frac{22}{7} \times 14 \times 14 \times 7$$

$$= 4312 \text{ m}^3 \text{ Ans.}$$

20 → त्रिज्या 4.2 cm वाले धातु के एक गोले को पिघलाकर त्रिज्या 6 cm वाले एक छेलन के रूप में ढाला जाता है। छेलन की केंचार्ड ज्ञात कीजिए।

हल: गोला का त्रिज्या (R) = 4.2 cm

छेलन का त्रिज्या (R) = 6 cm

∴ केंचार्ड (h) = ?

प्रश्न से,

छेलन का आयतन = गोला का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^2 h = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$6 \times 6 \times h = \frac{4}{3} \times 4.2 \times 4.2 \times 4.2$$

$$h = \frac{4 \times 1.4 \times 4.2 \times 4.2}{6 \times 6}$$

$$h = 4 \times 1.4 \times 0.7 \times 0.7 = 2.744 \text{ cm Ans.}$$

21 → कोई छतन एक खोखले अर्धगोले के आधार का है जिसके ऊपर एक खोखला छेलन अध्यारोपित है। अर्धगोले का व्यास 14 cm है और इस छतन (पात्र) की कुल केंचार्ड 13 cm है। इस छतन का आंतरिक पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: अर्धगोला में,

$$\text{व्यास (d)} = 14 \text{ cm}$$

$$\text{त्रिज्या (r)} = \frac{d}{2} = \frac{14}{2} = 7 \text{ cm}$$

छेलन में,

$$\text{त्रिज्या (R)} = 7 \text{ cm}$$

$$\text{केंचार्ड (h)} = 13 - 7 = 6 \text{ cm}$$



प्रश्न से,

छतन का पृ. क्ष. = अर्धगोला का वक्र पृ. क्ष. + छेलन का वक्र पृ. क्ष.

$$= 2\pi r^2 + 2\pi R h = 2\pi r(r+h)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7(7+6) = 44 \times 13 = 572 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

22 → लकड़ी के एक ठोस छेलन के पृष्ठीय सिरे पर एक अर्धगोला खोदकर निकालते हुए, एक वस्तु बनाई गई है, जैसा कि आकृति में दर्शाया गया है। यदि छेलन की केंचार्ड 10 cm है और आधार की त्रिज्या 3.5 cm है, तो इस वस्तु का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: छेलन का कें (h) = 10 cm

त्रिज्या (R) = 3.5 cm

अर्धगोला का त्रिज्या (r) = 3.5 cm

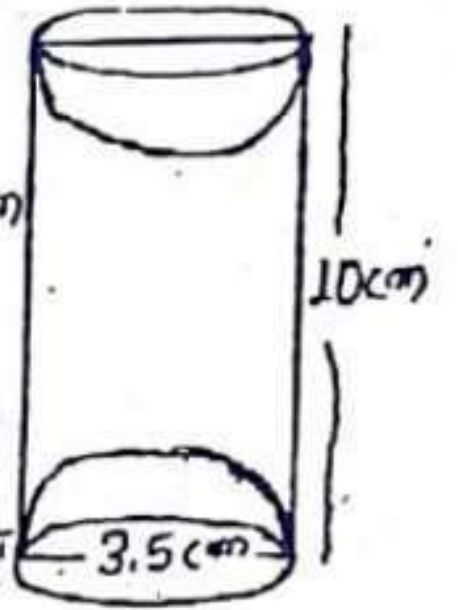
वस्तु का संपूर्ण पृ. क्ष. = छेलन का

वक्र पृ. क्ष. + 2 × अर्धगोला का वक्र पृ. क्ष.

$$= 2\pi R h + 2 \times 2\pi r^2 = 2\pi r(h+2r)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5(10 + 2 \times 3.5)$$

$$= 2 \times 11.0(10 + 7.0) = 22 \times 17 = 374 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$



23 → कोई तंबू एक छेलन के आधार का है जिस पर एक शंकु अध्यारोपित है। यदि छेलनाकार भाग की केंचार्ड और व्यास क्रमशः 2.1 m और 4 m है तथा शंकु की तिर्यक केंचार्ड 2.8 m है, तो इस तंबू की छानने में प्रयुक्त छैनवास का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। साथ ही, 500 रु. प्रति m^2 की दर से इसमें प्रयुक्त छैनवास की लागत ज्ञात कीजिए।

हल: छेलन का कें (h) = 2.1 m

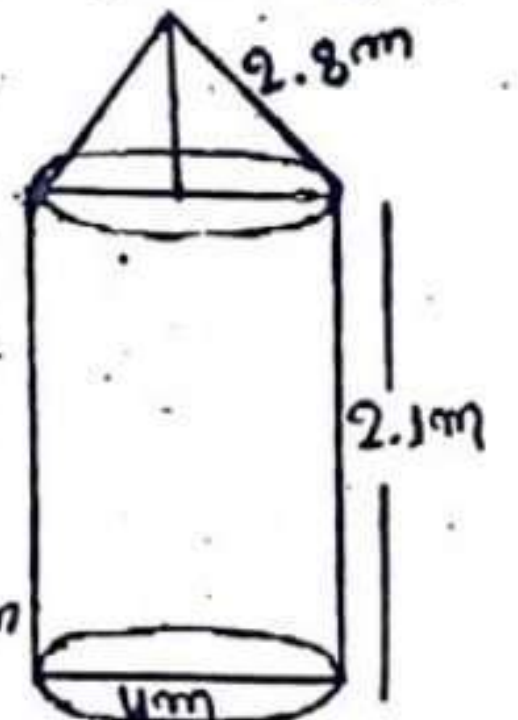
व्यास (d) = 4 m

त्रिज्या (R) = $\frac{d}{2} = \frac{4}{2}$

$$R = 2 \text{ m}$$

शंकु का त्रिज्या (r) = 2 m

तिर्यक कें (l) = 2.8 m



प्रश्न से,

कैलवास का क्षेत्र = छेलन का एक पृ. क्षेत्र + शंकु का एक पृ. क्षेत्र

$$= 2\pi rh + \pi r^2 = \pi r(2h + r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 2(2 \times 2.1 + 2.8) = \frac{44}{7}(4.2 + 2.8)$$

$$= \frac{44}{7} \times 7.0 = 44 \text{ m}^2 \text{ Ans.}$$

प्रति m^2 कैलवास की लागत = 500 रु.

$$44 \text{ m}^2 \quad \quad \quad = 44 \times 500$$

$$= 22000 \text{ रु.}$$

Ans.

24 → ऊँचाई 2.4 cm और व्यास 1.4 cm वाले एक ठोस छेलन में से इसी ऊँचाई और इसी व्यास वाला एक शंकुवाकार खोल काट लिया जाता है। शेष बचे ठोस का निकटतम वर्ग सेंटीमीटर तक पूर्णतः क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: छेलन का ऊँ (h) = 2.4 cm

॥ व्यास (d) = 1.4 cm

॥ त्रिज्या (r) = $\frac{d}{2} = \frac{1.4}{2}$

$r = 0.7 \text{ cm}$

शंकु का ऊँ (h) = 2.4 cm

॥ त्रिज्या (r) = 0.7 cm

॥ तिर्यक ऊँ (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$

$l = \sqrt{(2.4)^2 + (0.7)^2} = \sqrt{5.76 + 0.49}$

$l = \sqrt{6.25} = 2.5 \text{ cm}$

वृत्त का त्रिज्या (r) = 0.7 cm



प्रश्न से,

शेष बचे ठोस का क्षेत्र = छेलन का एक पृ. क्षेत्र + शंकु का एक पृ. क्षेत्र + वृत्त का क्षेत्र

$$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2 = \pi r(2h + 1 + r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 0.7(2 \times 2.4 + 2.5 + 0.7)$$

$$= 2.2(4.8 + 3.2) = 2.2 \times 8.0 = 17.6 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

25 → व्यास 3 cm का एक कुम्भी 14 cm की गहराई तक खोदा जाता है। इससे निकली हुई मिट्टी को कुम्भी के चारों ओर 4 cm चौड़ी एक चूल्हाकार अलगाव बनाते हुए, समान रूप से फैलाकर एक पुकार का ढाँचा बनाया जाता है। इस ढाँचे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: कुम्भी (छेलन) का व्यास (d) = 3 cm

॥ त्रिज्या (r) = $\frac{d}{2} = \frac{3}{2}$

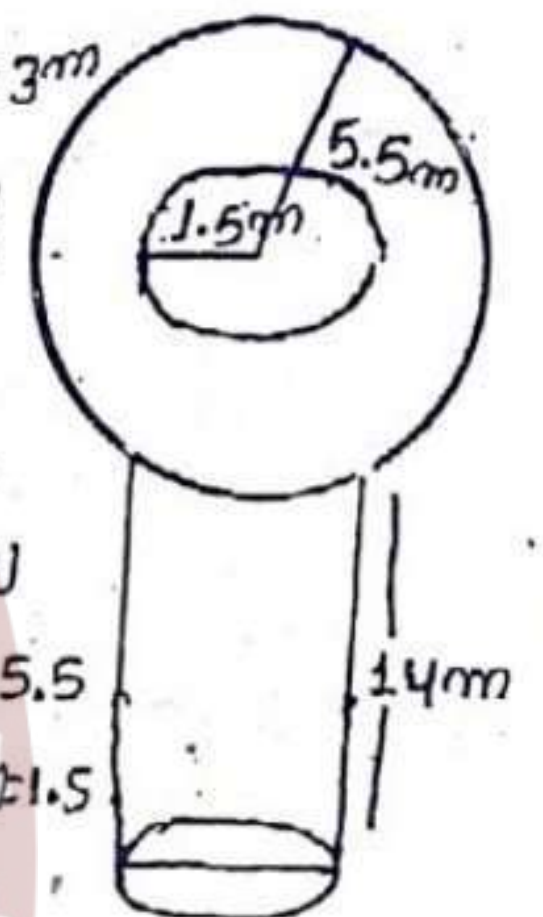
$r = 1.5 \text{ cm}$

॥ गहराई (h) = 14 cm

4 cm चौड़ाई पर अलग काटरी त्रिज्या (R)

$= 1.5 + 4 = 5.5$

अलग का त्रिज्या (R) = 5.5



प्रश्न से,

ढाँचा की ऊँ = $\frac{\text{छेलन का आयतन}}{\text{अलग का क्षेत्र}}$

$$= \frac{\pi r^2 h}{\pi(R^2 - r^2)} = \frac{r^2 h}{(R + r)(R - r)}$$

$$= \frac{1.5 \times 1.5 \times 14}{(5.5 + 1.5)(5.5 - 1.5)} = \frac{1.125 \times 14}{7 \times 4}$$

$= 1.125 \text{ m Ans.}$

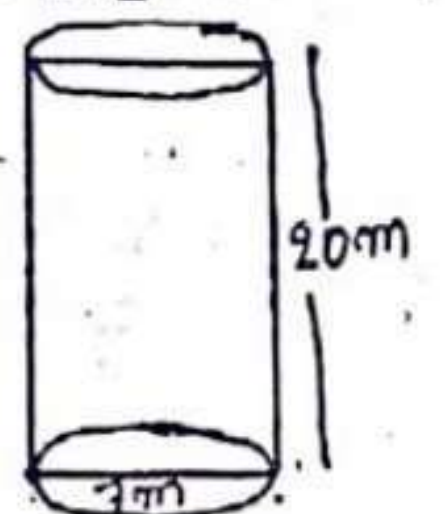
26 → व्यास 7 cm वाला 20 cm गहरा कुम्भी खोदा जाता है और खोदने से निकली हुई मिट्टी को समान रूप से फैलाकर 22 cm x 14 cm वाला एक चबूतरा बनाया गया है। इस चबूतरे की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल: कुम्भी (छेलन) में,

व्यास (d) = 7

त्रिज्या (r) = $\frac{d}{2} = \frac{7}{2}$

गहराई (h) = 20 cm



Scanned with CamScanner

हल: दोनों का त्रिज्या = 8 माना
दोनों का केंद्रार्ध = 1 माना
प्रश्न से,

$$\text{अनुपात} = \frac{\text{शंकु का आयतन}}{\text{छेलन का आयतन}} \\ = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\pi R^2 H} = \frac{1}{3} \text{ या } 1:3 \text{ Ans.}$$

30 → दो समान आयतन वाले घुनाकार छेलन की केंद्रार्धों का अनुपात 1:2 है, तो उनकी त्रिज्याओं का अनुपात क्या होगा?

हल: पहले छेलन का त्रिज्या = 8
" " " केंद्रार्ध (h) = 1
दूसरे छेलन का त्रिज्या = R
" " " केंद्रार्ध (H) = 2

प्रश्न से,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pi r^2 h}{\pi R^2 H} \Rightarrow 1 = \frac{r^2 \times 1}{R^2 \times 2}$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{r^2}{2R^2} \quad \left| \quad \frac{r^2}{R^2} = \frac{2}{1} \right.$$

$$\Rightarrow 2R^2 = r^2 \quad \left| \quad \frac{r}{R} = \sqrt{\frac{2}{1}} = \frac{\sqrt{2}}{1} \text{ या } \sqrt{2}:1 \right. \text{ Ans.}$$

31 → एक लंबवृत्तीय शंकु का आयतन $100\pi \text{ cm}^3$ है और केंद्रार्ध 12 cm है, तो तिर्यक केंद्रार्ध निकालें।

हल: शंकु का कें (h) = 12 cm
शंकु का आयतन = 100π

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi r^2 h = 100\pi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \times r^2 \times 12 = 100$$

$$r^2 = \frac{100 \times 3}{12} = 25$$

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{25} \\ r &= 5 \text{ cm} \\ l &= \sqrt{h^2 + r^2} \end{aligned}$$

$$l = \sqrt{12^2 + 5^2}$$

$$l = \sqrt{144 + 25}$$

$$l = \sqrt{169} = 13$$

∴ तिर्यक केंद्रार्ध = 13 cm Ans.

32 → एक लंबवृत्तीय शंकु की केंद्रार्ध 28 सेमी और आधार की त्रिज्या 21 सेमी है, तो उसके आयतन की गणना करें।

हल: लंबवृत्तीय शंकु की कें (h) = 28 cm
" " " त्रिज्या (r) = 21 cm

$$\begin{aligned} \text{आयतन} &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21 \times 28 = 12936 \text{ cm}^3 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

33 → किसी लंबवृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या 3 सेमी एवं उसकी केंद्रार्ध 7 सेमी है, तो उसका आयतन निकालें।

हल: लंबवृत्तीय शंकु की त्रिज्या (r) = 3 cm
" " " केंद्रार्ध (h) = 7 cm
" " " आयतन = $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 3 \times 3 \times 7 = 66 \text{ cm}^3 \text{ Ans.}$$

34 → यदि किसी शंकु की तिर्यक केंद्रार्ध 25 cm और केंद्रार्ध 24 सेमी हो, तो उसका आयतन निकालिए।

हल: शंकु की तिर्यक कें (l) = 25 cm
" " केंद्रार्ध (h) = 24 cm
" " त्रिज्या (r) = $\sqrt{l^2 - h^2}$

$$r = \sqrt{25^2 - 24^2} = \sqrt{625 - 576}$$

$$r = \sqrt{49} = 7 \text{ cm}$$

$$\text{शंकु का आयतन} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 = 1232 \text{ cm}^3 \text{ Ans.}$$

35 → यदि किसी शंकु की तिर्यक केंद्रार्ध 13 मी. और केंद्रार्ध 12 मी. हो, तो उसका आयतन निकालिए।

इस: शंकु की तिर्यक कें (l) = 13 cm

" " केंचार्ड (h) = 12 cm

" " त्रिज्या (r) = $\sqrt{l^2 - h^2}$

$$r = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{169 - 144}$$

$$r = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 5 \times 5 \times 12 = \frac{22 \times 25 \times 4}{7}$$

$$= \frac{2200}{7} = 314.285$$

$$= 314.285 \text{ या } 314.29 \text{ cm}^3 \text{ Ans.}$$

36 → शंकु का संपूर्ण पृष्ठ क्षेत्रफल यदि उसकी त्रिज्या 14 सेमी और तिर्यक केंचार्ड 15 सेमी हो।

इस: शंकु का त्रिज्या (r) = 14 cm

" " तिर्यक कें (l) = 15 cm

" " संपूर्ण पृ. क्षे. = $\pi r(l + r)$

$$= \frac{22}{7} \times 14(15 + 14) = 44 \times 29 = 1276 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

37 → शंकु का पूर्ण पृष्ठ-क्षेत्रफल लिखिए यदि उसकी त्रिज्या 3 सेमी और केंचार्ड 4 सेमी है।

इस: शंकु का त्रिज्या (r) = 3 cm

" " केंचार्ड (h) = 4 cm

" " तिर्यक कें (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$

$$l = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm}$$

शंकु का पूर्ण पृ. क्षे. = $\pi r(l + r)$

$$= \frac{22}{7} \times 3(5 + 3) = \frac{66}{7} \times 8 = \frac{528}{7} = 75.42$$

$$= 75.42 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

38 → एक लंबवृत्तीय शंकु के आधार की त्रिज्या 10 सेमी और तिर्यक केंचार्ड

15 सेमी है। शंकु का आयतन तथा कुल पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात करें।

इस: लंबवृत्तीय शंकु की त्रिज्या (r) = 10 cm

" " तिर्यक कें (l) = 15 cm

" " कें (h) = $\sqrt{l^2 - r^2}$

$$h = \sqrt{15^2 - 10^2} = \sqrt{225 - 100} = \sqrt{125}$$

$$h = 11.18 \text{ cm}$$

लंबवृत्तीय शंकु का आयतन = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 10 \times 10 \times 11.18$$

$$= \frac{24596.00}{21} = \frac{24596}{21} = 1171.23$$

$$= 1171.23 \text{ cm}^3 \text{ Ans.}$$

लंबवृत्तीय शंकु का कुल पृ. क्षे. = $\pi r(l + r)$

$$= \frac{22}{7} \times 10(15 + 10) = \frac{220}{7} \times 25$$

$$= \frac{5500}{7} = 785.71 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

39 → एक लंबवृत्तीय शंकु की केंचार्ड 24 सेमी और एक पृष्ठ का क्षेत्रफल 550 सेमी² है। शंकु का आयतन निकालें जबकि शंकु की तिर्यक केंचार्ड 25 सेमी है ($\pi = \frac{22}{7}$ ले।)

इस: लंबवृत्तीय शंकु की कें (h) = 24 cm

" " तिर्यक कें (l) = 25 cm

" " का एक पृ. क्षे. = 550

$$\Rightarrow \pi r l = 550$$

$$\Rightarrow \frac{22}{7} \times r \times 25 = 550$$

$$\Rightarrow \frac{550r}{7} = 550$$

$$r = 7 \text{ cm}$$

शंकु का आयतन = $\frac{1}{3} \pi r^2 h$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 \times 7 \times 24 = 1232 \text{ cm}^3$$

$$= 22 \times 7 \times 8 = 1232 \text{ cm}^3 \text{ Ans.}$$

40 → एक खिलौना का त्रिज्या 3.5 cm वाले एक शंकु के आधार का है, जो उसी त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण कंचाई 15.5 cm है। इस खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु का त्रिज्या $r = 3.5$ cm

" " कंचाई $h = 15.5 - 3.5$

$h = 12.0$ या 12 cm

" " तिर्यक कंचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$l = \sqrt{12^2 + 3.5^2} = \sqrt{144 + 12.25}$$

$$l = \sqrt{156.25} = 12.5 \text{ cm}$$

अर्धगोला का त्रिज्या $(r) = 3.5$ cm

खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्धगोला का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi r l + 2\pi r^2 = \pi r (l + 2r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 3.5 (12.5 + 2 \times 3.5)$$

$$= 11.0 (12.5 + 7.0)$$

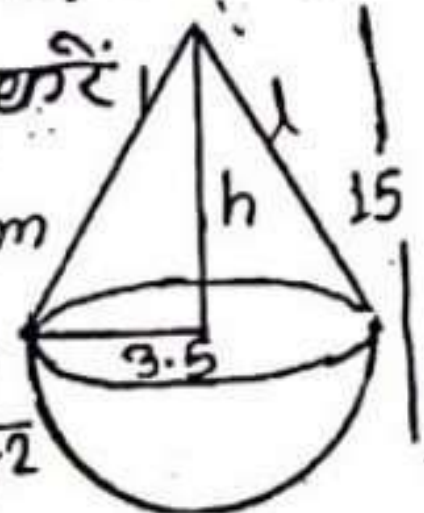
$$= 11 \times 19.5 = 214.5 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

41 → एक खिलौना 3.5 सेमी त्रिज्या वाले एक शंकु के आधार का है, जो उसी त्रिज्या वाले अर्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण कंचाई 15 सेमी है, तो सम्पूर्ण पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

हल: शंकु का त्रिज्या $(r) = 3.5$ cm

" " कंचाई $h = 15 - 3.5 = 11.5$

" " तिर्यक कंचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$



$$l = \sqrt{(11.5)^2 + (3.5)^2} = \sqrt{132.25 + 12.25}$$

$$l = \sqrt{144.50} = 12.02 \text{ cm}$$

खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्धगोला का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi r l + 2\pi r^2 = \pi r (l + 2r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 3.5 (12.02 + 2 \times 3.5)$$

$$= 11.0 (12.02 + 7.0)$$

$$= 11 \times 19.02 = 209.22 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

42 → एक खिलौना त्रिज्या 7 सेमी वाले एक शंकु के आधार का है, जो कि उसी त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर अध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण कंचाई 16 सेमी है। इस खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु का त्रिज्या $(r) = 7$ cm

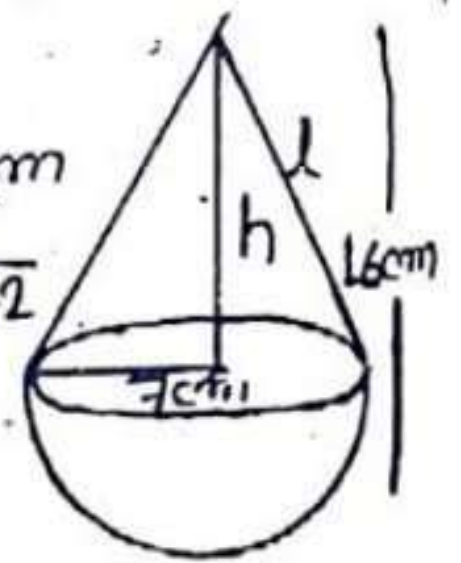
" " कंचाई $h = 16 - 7 = 9$ cm

" " तिर्यक कंचाई $l = \sqrt{h^2 + r^2}$

$$l = \sqrt{9^2 + 7^2} = \sqrt{81 + 49}$$

$$l = \sqrt{130} = 11.4 \text{ cm}$$

अर्धगोला का त्रिज्या $(r) = 7$ cm



प्रश्न से,
खिलौने का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल + अर्धगोला का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi r l + 2\pi r^2 = \pi r (l + 2r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 7 (11.4 + 2 \times 7) = 22 (11.4 + 14)$$

$$= 22 \times 25.4 = 558.8 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

43 → एक खिलौने की त्रिज्या 6 cm वाले एक शंकु के आधार का है, जो

उसी त्रिज्या वाले एक अर्धगोले पर
अध्यारोपित है। इस खिलौने की सम्पूर्ण
ऊँचाई 11 cm है। इस खिलौने का
सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु का त्रिज्या (r) = 6 cm

" " " " ऊँ (h) = 11 - 6 = 5 cm

" " " " तिर्यक ऊँ (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$

$$l = \sqrt{5^2 + 6^2} = \sqrt{25 + 36}$$

$$l = \sqrt{61} = 7.81 \text{ cm}$$

अर्धगोला का त्रिज्या (r) = 6 cm

प्रश्न से,

खिलौने का सम्पूर्ण पृ. क्ष. = शंकु का पृ. क्ष.

+ अर्धगोला का पृ. क्ष.

$$= \pi r l + 2\pi r^2 = \pi r (l + 2r)$$

$$= \frac{22}{7} \times 6 (7.81 + 2 \times 6) = \frac{132}{7} (7.81 + 12)$$

$$= \frac{132}{7} \times 19.81 = \frac{2614.92}{7} = 373.56$$

$$= 373.56 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$$

44 → एक शंकुआकार लड्डू के उपर एक
अर्धगोला अध्यारोपित है। लड्डू
की पूरी ऊँचाई 5 cm और इसका
व्यास 3.5 सेमी है तो लड्डू का
पृष्ठ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

शंकुआकार लड्डू में,

व्यास (d) = 3.5

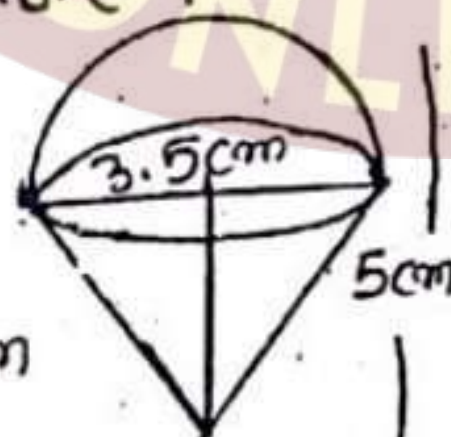
त्रिज्या (r) = $\frac{d}{2} = \frac{3.5}{2} \text{ cm}$

ऊँ (h) = 5 - $\frac{3.5}{2} = 5 - 1.75 = 3.25 \text{ cm}$

तिर्यक ऊँ (l) = $\sqrt{h^2 + r^2}$

$$l = \sqrt{(3.25)^2 + (1.75)^2}$$

$$l = \sqrt{10.5625 + 3.0625}$$



$$l = \sqrt{13.625} = 3.691 \text{ या } 3.7 \text{ cm}$$

अर्धगोला का त्रिज्या (r) = $\frac{3.5}{2} \text{ cm}$
प्रश्न से,

लड्डू का पृ. क्ष. = शंकु का पृ. क्ष. +
अर्धगोला का पृ. क्ष.

$$= \pi r l + 2\pi r^2 = \pi r (l + 2r)$$

$$= \frac{22}{7} \times \frac{3.5}{2} (3.7 + 2 \times \frac{3.5}{2})$$

$$= 11 \times 0.5 (3.7 + 3.5)$$

$$= 11 \times 0.5 \times 7.2 = 39.6 \text{ cm}^2$$

Ans.

45 → मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई
24 cm और आधार त्रिज्या 6 cm वाला
एक शंकु बनाया गया है। एक
एडचे में इसे गोले के आकार में
छदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात
कीजिए।

अथवा: → 6 सेमी त्रिज्या और 24 सेमी ऊँचाई
वाले मिट्टी के शंकु को गोले में
छदल दिया गया है। गोले की त्रिज्या
ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु का त्रिज्या (r) = 6 cm

" " " " ऊँ (h) = 24 cm

गोला का त्रिज्या (R) = ?

प्रश्न से,

गोला का आयतन = शंकु का आयतन

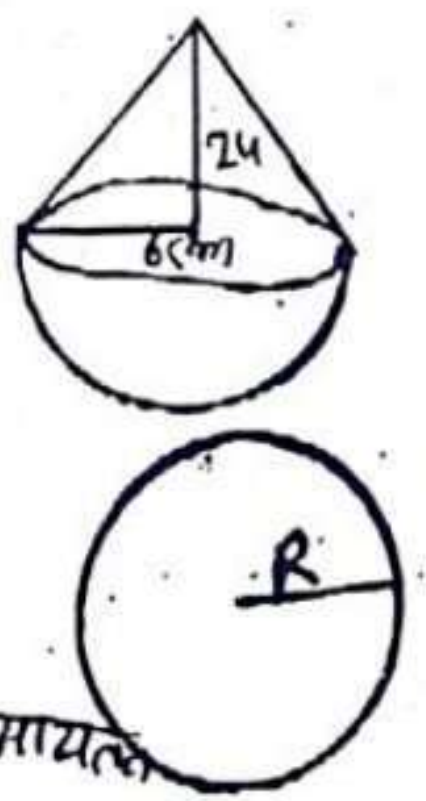
$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\Rightarrow 4R^3 = r^2 h$$

$$R^3 = \frac{r^2 h}{4} = \frac{6 \times 6 \times 24}{4} = 6 \times 6 \times 6$$

$$R = \sqrt[3]{6 \times 6 \times 6} = 6 \text{ cm}$$

∴ गोला की त्रिज्या (R) = 6 cm Ans.



46 → मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 8cm और आधार त्रिज्या 2सेमी वाला एक शंकु बनाया गया है। एक अच्छे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात करें।

हल: शंकु का त्रिज्या (r) = 2cm

" " " " ऊँ (h) = 8cm

गोले का त्रिज्या = R माना

उपेक्ष से

गोले का आयतन = शंकु का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\Rightarrow 4R^3 = r^2 h$$

$$R^3 = \frac{r^2 h}{4} = \frac{2 \times 2 \times 8}{4} = 2 \times 2 \times 2$$

$$R = \sqrt[3]{2 \times 2 \times 2} = 2 \text{ cm}$$

∴ गोले का त्रिज्या (R) = 2cm Ans

47 → मॉडल बनाने वाली मिट्टी से ऊँचाई 12सेमी और आधार त्रिज्या 3सेमी वाला एक शंकु बनाया गया है। एक अच्छे ने इसे गोले के आकार में बदल दिया। गोले की त्रिज्या ज्ञात करें।

हल: शंकु का त्रिज्या (r) = 3cm

" " " " ऊँ (h) = 12cm

गोले का त्रिज्या = R माना

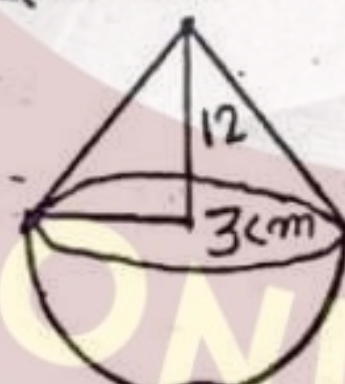
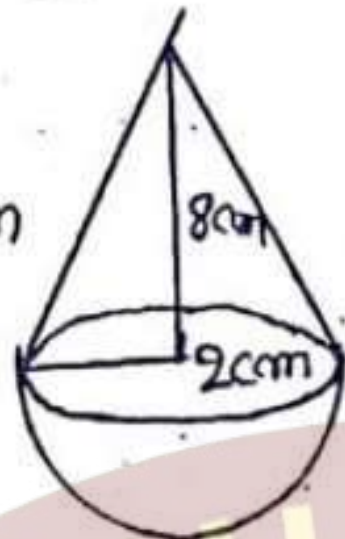
उपेक्ष से,

गोले का आयतन = शंकु का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$R^3 = \frac{r^2 h}{4} = \frac{3 \times 3 \times 12}{4} = 3 \times 3 \times 3$$

$$R = \sqrt[3]{3 \times 3 \times 3} = 3 \text{ cm Ans.}$$



48 → क्रमशः 6cm, 8cm और 10cm त्रिज्याओं वाले धातु के तीन ठोस गोले को पिघलाकर एक बड़ा ठोस गोला बनाया जाता है। इस गोले की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: पहले गोला का त्रिज्या (r_1) = 6cm

दूसरे " " " (r_2) = 8cm

तीसरे " " " (r_3) = 10cm

बड़ा ठोस गोला का त्रिज्या = R माना

उपेक्ष से,

बड़ा ठोस गोला का आयतन = तीनों गोले का आयतन

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 + \frac{4}{3}\pi r_2^3 + \frac{4}{3}\pi r_3^3$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi (r_1^3 + r_2^3 + r_3^3)$$

$$R^3 = (6^3 + 8^3 + 10^3)$$

$$R^3 = 216 + 512 + 1000 = 1728 \text{ cm}^3$$

$$R = \sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{12 \times 12 \times 12} = 12 \text{ cm}$$

∴ बड़ा ठोस गोला का त्रिज्या (R) = 12cm Ans.

49 → 45सेमी ऊँची धातु की सिरी की त्रिज्या 28सेमी और 7सेमी है। धातु का आयतन ज्ञात करें।

अथवा: → एक शंकु के छिन्नक, जो 45cm ऊँचा है, की सिरी की त्रिज्या 28cm और 7cm है। इसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु के छिन्नक में,

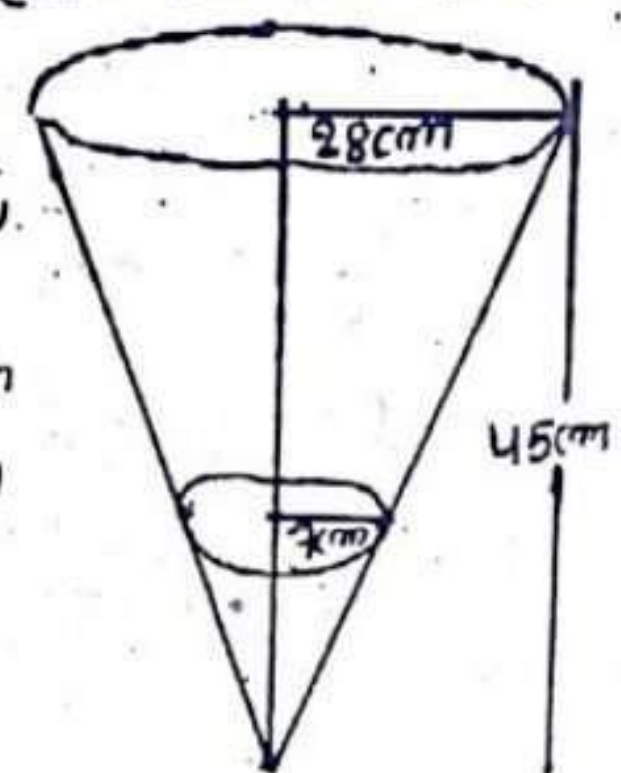
ऊँचाई (h) = 45cm

बड़ा त्रिज्या (R) = 28cm

छोटा " (r) = 7cm

आयतन = ?

सूत्र से,



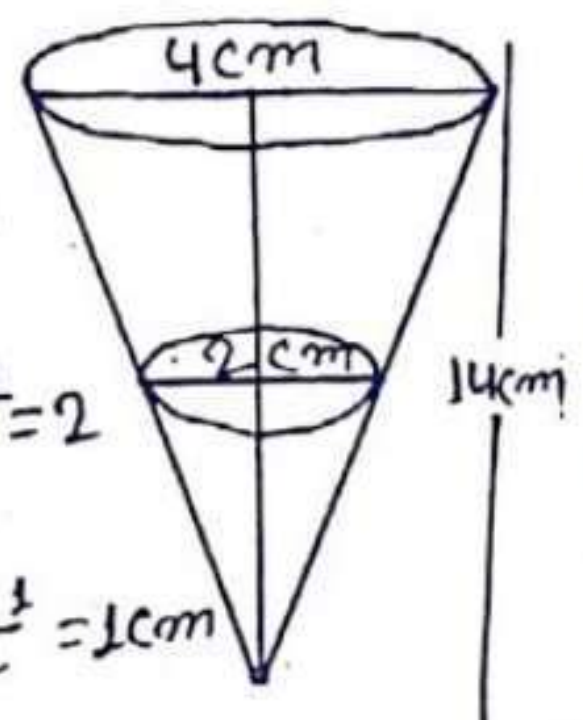
शंकु के घिननका का आयतन $= \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 15 (28^2 + 7^2 + 28 \times 7)$
 $= \frac{22}{7} \times 15 (784 + 49 + 196)$
 $= \frac{330}{7} \times 1029 = 330 \times 147$
 $= 48510 \text{ cm}^3 \text{ Ans.}$

50 → पानी पीने वाला एक गिलास 7 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के घिननका के आकार का है। दोनों घुत्ताकारों सिरों के व्यास 4 cm और 2 cm हैं। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु के घिननका में,
 ऊँचाई (h) = 7 cm
 बड़ा व्यास (R) = 4 cm
 " त्रिज्या (R) = $\frac{4}{2} = 2$
 $R = 2 \text{ cm}$
 छोटा व्यास (r) = 2 cm
 " त्रिज्या (r) = $\frac{2}{2} = 1 \text{ cm}$
 गिलास की धारिता $= \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 7 (2^2 + 1^2 + 2 \times 1)$
 $= \frac{22}{3} (4 + 1 + 2) = \frac{22}{3} \times 7$
 $= \frac{154}{3} = 51.33 = 51.33 \text{ cm}^3 \text{ Ans.}$

51 → पानी पीने वाला एक गिलास 14 cm ऊँचाई वाले एक शंकु के घिननका के आकार का है। दोनों घुत्ताकारों सिरों के व्यास 4 cm और 2 cm हैं। इस गिलास की धारिता ज्ञात कीजिए।

हल: गिलास (घिननका) में,
 ऊँचाई (h) = 14 cm
 बड़ा व्यास (R) = 4 cm
 " त्रिज्या (R) = $\frac{4}{2} = 2$
 छोटा व्यास (r) = 2 cm
 " त्रिज्या (r) = $\frac{2}{2} = 1 \text{ cm}$



गिलास (घिननका) की धारिता $= \frac{1}{3} \pi h (R^2 + r^2 + Rr)$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 14 (2^2 + 1^2 + 2 \times 1)$
 $= \frac{44}{3} (4 + 1 + 2) = \frac{44}{3} \times 7 = \frac{308}{3}$
 $= 102.666 \text{ या } 102.67 \text{ cm}^3 \text{ Ans.}$

52 → एक शंकु के घिननका की तिर्यक ऊँचाई 4 cm है तथा इसके घुत्तीय सिरों के परिमाण (परिधियों) 18 cm और 6 cm हैं। इस घिननका का एक घुत्तीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: शंकु के घिननका में,
 तिर्यक ऊँ (l) = 4 cm

पहले घुत्त की परिधि = 18 cm

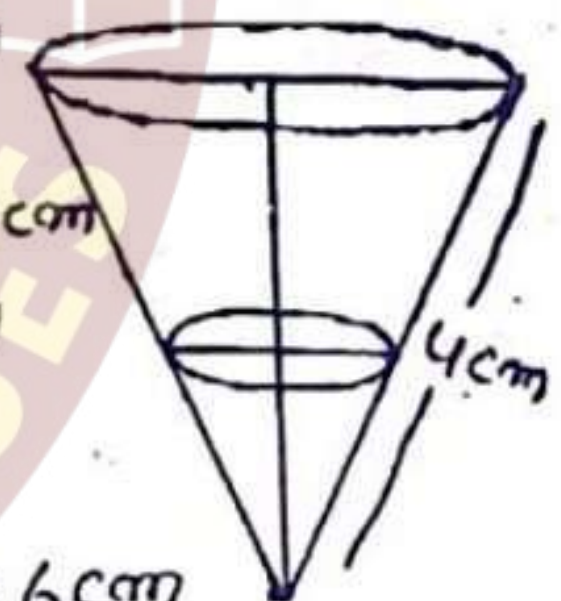
$2\pi R = 18$

$\pi R = 9$

दूसरे घुत्त की परिधि = 6 cm

$2\pi r = 6$

$\pi r = 3$



घिननका का एक घुत्तीय क्षेत्रफल $= \pi l (R + r)$

$= \pi (R + r) = \pi (9 + 3)$

$= \pi \times 12 = 48 \text{ cm}^2 \text{ Ans.}$

प्रश्नावली: 14

1 → चर मान 2, 5, 7, 3, 3, 6 हैं तो इनका माध्य (औसत) क्या होगा?

हल: चर मान 2, 5, 7, 3, 3, 3, 6.

$$\text{माध्य} = \frac{2+5+7+3+3+3+6}{7} = \frac{29}{7} = 4.14$$

$$= 4.14 \text{ Ans.}$$

2 → चर-मान 1, 4, 6, 9 का माध्य ज्ञात करें।

हल: चर-मान = 1, 4, 6, 9

$$\text{माध्य} = \frac{1+4+6+9}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ Ans.}$$

3 → 10, 7, 13, 20, 15 का माध्य ज्ञात करें ?

$$\text{माध्य} = \frac{10+7+13+20+15}{5} = \frac{65}{5} = 13$$

$$= 13 \text{ Ans.}$$

4 → यदि x, 3, 4, 5 का माध्य 3 हो तो x का मान निकालें।

हल: x, 3, 4, 5

माध्य = 3

$$\Rightarrow \frac{x+3+4+5}{4} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{x+12}{4} = 3$$

$$\Rightarrow x+12 = 12$$

$$x = 12 - 12 = 0 \text{ Ans.}$$

5 → यदि 3, x, 6, 15, 10, 5 का माध्य 8 है तो x का मान ज्ञात करें।

हल: 3, x, 6, 15, 10, 5

माध्य = 8

$$\Rightarrow \frac{3+x+6+15+10+5}{6} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{x+39}{6} = 8$$

$$x = 48 - 39$$

$$x = 9 \text{ Ans.}$$

6 → 7 छात्रों का औसत भार 55 किलो-ग्राम है। इनमें 6 छात्रों के भार क्रमशः 52, 58, 55, 53, 56 और 54 किलो-ग्राम हैं। सातवें छात्र का भार ज्ञात करें।

हल: सातवें छात्र का भार = x kg माना प्रश्न से,

$$\text{औसत भार} = \frac{52+58+55+53+56+54+x}{7}$$

$$\Rightarrow 55 = \frac{x+328}{7} \Rightarrow x+328 = 385$$

$$x = 385 - 328 = 57 \text{ kg Ans.}$$

7 → 3 संख्याओं का माध्य 8 है। जाँच में पाया गया कि गणना में एक संख्या गलती से 15 की जगह 12 लिखा गया है तो शुद्ध माध्य की गणना करें।

हल: 3 संख्याओं का माध्य = 8

$$3 \text{ " " " कुल मान} = 8 \times 3 = 24$$

$$\therefore 3 \text{ संख्याओं का शुद्ध माध्य} = \frac{24 + (15 - 12)}{3}$$

$$= \frac{24 + 3}{3} = \frac{27}{3} = 9 \text{ Ans.}$$

8 → 30 पेक्षण के माध्य 150 है। जाँच में पाया गया कि गणना में एक पेक्षण की गलती से 165 की जगह 135 अंकित किया गया, तो शुद्ध माध्य की गणना करें।

हल: 30 पेक्षण का माध्य = 150

$$30 \text{ " " " कुल मान} = 150 \times 30 = 4500$$

$$\begin{aligned} 30 \text{ संख्याओं का शुद्ध माध्य} &= \frac{4500 + (165 - 135)}{30} \\ &= \frac{4500 + 30}{30} = \frac{4530}{30} \\ &= 151 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

9 → 2, 7, 6, 4, 9, 8, 5 का माध्य ज्ञात करें।

हल: उद्देश्य क्रम = 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9

माध्य का या माध्यक = 6 Ans.

[जाँच का अंक माध्यक होता है]

10 → यदि 9, 5, 8, 7, 15, 2, 6, 19, 17 का माध्य ज्ञात करें।

12 → उद्देश्य क्रम = 2, 5, 6, 7, 8, 9, 15, 17, 19
माध्यक = 8 Ans.

13 → 2, 7, 6, 4, 8, 9 की माध्यिका ज्ञात करें।

उद्देश्य क्रम = 2, 4, 6, 7, 8, 9

$$\text{माध्यिका} = \frac{6+7}{2} = \frac{13}{2} = 6.5 \text{ Ans.}$$

14 → यदि 8, 2, 6, 5, 4, 3, 1, 15, 7, 14 का माध्यक बताइए।

उद्देश्य क्रम = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 14, 15

$$\text{माध्यक} = \frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5.5 \text{ Ans.}$$

15 → 3, 4, 0, 3, 4, 5, 3 का बहुलक होगा-

उद्देश्य क्रम = 3 Ans. [सबसे अधिक बार आनेवाली सं. बहुलक होती है।]

16 → 1, 3, 0, 3, 1, 5, 1 का बहुलक क्या होगा?

उद्देश्य क्रम = 1 Ans.

17 → 3, 5, 0, 2, 3, 1, 5, 7, 3, 5 का बहुलक क्या होगा?

$$\text{उद्देश्य क्रम} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \text{ Ans.}$$

[अगर दो संख्या बराबर हो तो दोनों की जोड़ को 2 से भाग देकर बहुलक ज्ञात किया जाता है।]

18 → 5, 2, 5, 7, 2, 4, 4, 5, 4, 7, 4, 5 का बहुलक बताइए।

$$\text{उद्देश्य क्रम} = \frac{4+5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ Ans.}$$

19 → किसी वितरण के माध्य, बहुलक और माध्यक में क्या संबंध है? संभवतः - बहुलक का सूत्र लिखिए।

उद्देश्य क्रम = 3 माध्यक - 2 माध्य Ans.
18 → प्रथम पाँच पूर्ण संख्याओं का माध्य बताइए।

उद्देश्य क्रम = 0, 1, 2, 3, 4

$$\text{माध्य} = \frac{0+4}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ Ans.}$$

19 → प्रथम पाँच प्राकृत संख्याओं का माध्य ज्ञात करें।

उद्देश्य क्रम = 1, 2, 3, 4, 5

$$\text{माध्य} = \frac{1+5}{2} = \frac{6}{2} = 3 \text{ Ans.}$$

20 → प्रथम पाँच विषम संख्याओं का माध्य क्या होगा?

उद्देश्य क्रम = 1, 3, 5, 7, 9

$$\text{माध्य} = \frac{1+9}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ Ans.}$$

21 → प्रथम पाँच सम संख्याओं का माध्य बताइए।

उद्देश्य क्रम = 2, 4, 6, 8, 10

$$\text{माध्य} = \frac{2+10}{2} = \frac{12}{2} = 6 \text{ Ans.}$$

22 → 5, 4, 8, 7, 2, 5, 9, 8, 4 में परिसर ज्ञात करें।

$$\text{उद्देश्य क्रम} = \text{बड़ी सं.} - \text{छोटी सं.} = 9 - 2 = 7 \text{ Ans.}$$

23 → 5, 9, 2, 13, 9, 3, 1 में परिसर ज्ञात करें।

$$\text{उद्देश्य क्रम} = \text{बड़ी सं.} - \text{छोटी सं.} = 13 - 9 = 4 \text{ Ans.}$$

[परिसर:- सबसे बड़ी संख्या और सबसे छोटी संख्या के अंतर को परिसर कहते हैं।]

24 → यदि चर-मान 2, 3, 4 की बारंबारता क्रमशः 2, 5, 10 हो तो इनका माध्य ज्ञात करें।

हल:

पर-मान	आवृत्ति f	fx
2	2	4
3	5	15
4	10	40
कुलयोग	17	59

$$\text{माध्य} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{59}{17} = 3.4 \text{ Ans.}$$

25- यदि किसी सममित अंश का माध्य और माध्यक क्रमशः 26.8 और 27.9 हैं तो बहुलक निकालें।

हल: माध्य = 26.8

माध्यक = 27.9

$$\begin{aligned} \text{बहुलक} &= 3\text{माध्यक} - 2\text{माध्य} \\ &= 3 \times 27.9 - 2 \times 26.8 \\ &= 83.7 - 53.6 = 30.1 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

26- यदि किसी वितरण का बहुलक 35.45 और माध्य 35.6 है, तो वितरण का माध्य निकालें।

हल: बहुलक = 35.45

माध्य = 35.6

$$3\text{माध्यक} = \text{बहुलक} + 2\text{माध्य}$$

$$3\text{माध्यक} = 35.45 + 2 \times 35.6$$

$$3\text{माध्यक} = 35.45 + 71.2$$

$$3\text{माध्यक} = 106.65$$

$$\text{माध्यक} = \frac{106.65}{3} = 35.55$$

$$\text{माध्यक} = 35.55 \text{ Ans.}$$

27- यदि किसी आँकड़े की माध्यिका 9 एवं बहुलक 13 है, तो आँकड़े का माध्य ज्ञात करें।

हल: माध्यिका = 9

बहुलक = 13

$$2\text{माध्य} = 3\text{माध्यिका} - \text{बहुलक}$$

$$2\text{माध्य} = 3 \times 9 - 13$$

$$2\text{माध्य} = 27 - 13 = 14$$

$$\text{माध्य} = \frac{14}{2} = 7$$

$$\text{माध्य} = 7 \text{ Ans.}$$

28- $x+2, 2x+3, 4x+5$ और $5x+2$ का गणितीय माध्य निकालें।

$$\text{माध्य} = \frac{x+2+2x+3+4x+5+5x+2}{4}$$

$$= \frac{12x+12}{4} = \frac{4(3x+3)}{4} = 3x+3 \text{ Ans.}$$

29- यदि वितरण 40, 15, 18, 22, 29, x , 32, y तथा 29 का समानांतर माध्य 25 है तो $x+y$ का मान निकालें।

हल: माध्य = 25

$$\Rightarrow \frac{40+15+18+22+29+x+32+y+29}{9} = 25$$

$$\Rightarrow \frac{185+x+y}{9} = 25$$

$$\Rightarrow 185+x+y = 225$$

$$x+y = 225-185$$

$$\therefore x+y = 40 \text{ Ans.}$$

30- 7 छात्रों का औसत भार 56 किलोग्राम है।

उसमें 6 छात्रों का भार क्रमशः 52, 58, 55, 53

56 तथा 54 किलोग्राम है। सातवें छात्र का भार ज्ञात करें।

हल: सातवें छात्र का भार = x kg माना
ज्ञात है,

औसत भार = 56

$$\Rightarrow \frac{52+58+55+53+56+54+x}{7} = 56$$

$$\Rightarrow \frac{328+x}{7} = 56 \Rightarrow 328+x = 392$$

$$\Rightarrow x = 392-328 = 64 \text{ kg Ans.}$$

31 → यदि चर के मान 2, 4, 6, 8 हों और
आवृत्तियाँ क्रमशः 3, 2, 1, x हों तथा
चर के मानों का माध्य 4 हो तो x
निकालें।

सं:

चरमान (x)	आवृत्ति (f)	fx
2	3	6
4	2	8
6	1	6
8	x	8x
कुल योग	x + 6	8x + 20

$$\text{माध्य} = \frac{\sum fx}{\sum f}$$

$$4 = \frac{8x + 20}{x + 6}$$

$$\Rightarrow 8x + 20 = 4x + 24$$

$$\Rightarrow 8x - 4x = 24 - 20$$

$$\Rightarrow 4x = 4$$

$$\therefore x = 1 \text{ Ans.}$$

32 → आवृत्तियों का माध्य 2.6 है
तो y = ?

चिन्तक (x)	1	2	3	4	5
आवृत्ति (f)	4	5	y	1	2

सं:

चिन्तक (x)	आवृत्ति (f)	fx
1	4	4
2	5	10
3	y	3y
4	1	4
5	2	10
कुल योग	y + 12	3y + 28

$$\text{माध्य} = 2.6$$

$$\Rightarrow \frac{\sum fx}{\sum f} = 2.6$$

$$\Rightarrow \frac{3y + 28}{y + 12} = 2.6$$

$$\Rightarrow 3y + 28 = 2.6y + 31.2$$

$$\Rightarrow 3y - 2.6y = 31.2 - 28$$

$$\Rightarrow 0.4y = 3.2$$

$$y = \frac{3.2}{0.4} = 8$$

$$y = 8 \text{ Ans.}$$

33 → निम्नलिखित सारणी से समान्तर माध्य
निकालें।

अंक	0-10	10-20	20-30	30-40
विद्यार्थियों की सं.	10	20	14	6

अंक	विद्यार्थियों की सं.	x	fx
0-10	10	5	50
10-20	20	15	300
20-30	14	25	350
30-40	6	35	210
कुल योग	50		910

$$\text{माध्य} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{910}{50} = 18.2 \text{ Ans.}$$

34 → किसी कारखाना के 50 कर्मचारियों
की दैनिक मजदूरी का वितरण
निम्नलिखित है:

अथवा → माध्य ज्ञात करें:-

दैनिक मजदूरी (रु. में)	100-120	120-140	140-160	160-180
कर्मचारियों की सं.	12	14	8	6

हल:

दैनिक मजदूरी (रु. में)	कर्मचारियों की सं.	वर्ग चिह्न (x)	fx
100-120	12	110	1320
120-140	14	130	1820
140-160	8	150	1200
160-180	6	170	1020
180-200	10	190	1900
कुल योग	50		7260

$$\text{माध्य} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{7260}{50} = 145.2$$

$$= 145.20 \text{ रु. Ans.}$$

35 → माध्य ज्ञात करें:-

आय (वर्षों)	5-15	15-25	25-35	35-45	45-55
संख्या की सं.	6	11	21	23	14

55-65
5

हल:

वर्ग (वर्षों में)	री गियो की सं. (f)	वर्ग चिन्ह	कम
5-15	6	10	60
15-25	11	20	220
25-35	21	30	630
35-45	23	40	920
45-55	14	50	700
55-65	5	60	300
कुल योग	80		2830

$$\text{माध्य} = \frac{\sum km}{\sum f} = \frac{2830}{80} = 35.375$$

Ans.

36 → निम्न छंटन का माध्य 50 हो तो f का मान मालूम करें।

वर्ग	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
आवृत्ति	17	28	32	f	19

हल:

वर्ग	आवृत्ति (f)	वर्ग चिन्ह	कम
0-20	17	10	170
20-40	28	30	840
40-60	32	50	1600
60-80	f	70	70f
80-100	19	90	1710
कुल योग	f + 96		70f + 4320

$$\text{माध्य} = 50$$

$$\Rightarrow \frac{\sum km}{\sum f} = 50$$

$$\Rightarrow \frac{70f + 4320}{f + 96} = 50$$

$$\Rightarrow 70f + 4320 = 50f + 4800$$

$$\Rightarrow 70f - 50f = 4800 - 4320$$

$$\Rightarrow 20f = 480$$

$$f = 24 \text{ Ans.}$$

37 → माध्यक ज्ञात करें -

वर्ग अंतराल	1-4	4-7	7-10	10-13	13-16	16-19
आवृत्ति						

हल:

वर्ग अंतराल	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति
1-4	6	6
4-7	30	36
7-10	40	76
10-13	16	92
13-16	4	96
16-19	4	100
कुल योग	n = 100	

$$\frac{n}{2} = \frac{100}{2} = 50 \text{ से ठीक छोट वाली संचयी आवृत्ति}$$

$$\text{माध्यक वर्ग (L)} = 7$$

$$\text{आवृत्ति (f)} = 40$$

$$\text{संचयी आवृत्ति (cf)} = 36$$

$$h = 4 - 1 = 3$$

$$\text{माध्यक} = 1 + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h$$

$$= 1 + \frac{50 - 36}{40} \times 3$$

$$= 1 + \frac{14}{40} \times 3$$

$$= 1 + \frac{21}{20}$$

$$= 1 + 1.05$$

$$= 2.05 \text{ Ans.}$$

38 → माध्यक ज्ञात करें -

परिवार माप	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवारों की सं.	7	8	2	2	1

परिवार माप	परिवारों की सं. (f)	संचयी आवृत्ति
1-3	7	7
3-5	8	15
5-7	2	17
7-9	2	19
9-11	1	20
योग	n = 20	

$$\frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ से ठीक छोट वाली संचयी आवृत्ति}$$

$$\text{माध्यक वर्ग (L)} = 3$$

$$\text{आवृत्ति (f)} = 8$$

$$\text{संचयी आवृत्ति (cf)} = 7$$

$$h = 3 - 1 = 2$$

$$\text{माध्यक} = 1 + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h$$

$$= 3 + \frac{10-7}{8} \times 2 = 3 + \frac{3}{4} \times 0.75$$

$$= 3 + 0.75 = 3.75 \text{ Ans.}$$

39 → यदि नीचे दिये हुए अंश का माध्यक 28.5 हो तो x और y का मान ज्ञात कीजिए :-

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
आवृत्ति	5	x	20	15	y
				50-60	योग
				5	60

हल:

वर्ग अंतराल	आवृत्ति f	संचयी आवृत्ति cf
0-10	5	5
10-20	x	$x+5$
20-30	20	$x+25$
30-40	15	$x+40$
40-50	y	$x+y+40$
50-60	5	$x+y+45$
योग	$n=60$	

$$\frac{n}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ से ठीक बाद वाली संचयी आवृत्ति}$$

$$l = 20, cf = x+5, f = 20, h = 20-10 = 10$$

$$\text{माध्यक} = 28.5$$

$$\Rightarrow l + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h = 28.5$$

$$\Rightarrow 20 + \frac{30 - (x+5)}{20} \times 10 = 28.5$$

$$\Rightarrow 20 + \frac{30 - x - 5}{2} = 28.5$$

$$\Rightarrow \frac{25 - x}{2} = 28.5 - 20$$

$$\Rightarrow \frac{25 - x}{2} = 8.5$$

$$\Rightarrow 25 - x = 17.0$$

$$\Rightarrow -x = 17 - 25$$

$$\Rightarrow +x = +8$$

$$x = 8$$

$$\therefore x + y + 45 = 60$$

$$x + y + 45 = 60$$

$$y + 53 = 60$$

$$y = 60 - 53 = 7$$

$$\therefore x = 8 \text{ Ans.}$$

$$y = 7 \text{ Ans.}$$

40 → यदि नीचे दिये हुए अंश का माध्यक 28.5 हो तो x तथा y का मान ज्ञात कीजिए :-

वर्ग अंतराल	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
आवृत्ति	4	x	21	15	y
				50-60	योग
				5	60

हल:

वर्ग अंतराल	आवृत्ति f	संचयी आवृत्ति cf
0-10	4	4
10-20	x	$x+4$
20-30	21	$x+25$
30-40	15	$x+40$
40-50	y	$x+y+40$
50-60	5	$x+y+45$
योग	$n=60$	

$$\frac{n}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ से ठीक बाद वाली संचयी आवृत्ति}$$

$$l = 20, cf = x+4, f = 21, h = 30-20 = 10$$

$$\text{माध्यक} = 28.5$$

$$\Rightarrow l + \frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \times h = 28.5$$

$$\Rightarrow 20 + \frac{30 - (x+4)}{21} \times 10 = 28.5$$

$$\Rightarrow 20 + \frac{30 - x - 4}{21} \times 10 = 28.5$$

$$\Rightarrow \frac{26 - x}{21} \times 10 = 28.5 - 20$$

$$\Rightarrow \frac{260 - 10x}{21} = 8.5$$

$$\Rightarrow 260 - 10x = 178.5$$

$$\Rightarrow -10x = 178.5 - 260$$

$$\Rightarrow +10x = +81.5$$

$$x = \frac{81.5}{10} = 8.15$$

$$x = 8.15$$

$$\therefore x + y + 45 = 60$$

$$\Rightarrow 8.15 + y + 45 = 60$$

$$\Rightarrow y + 53.15 = 60$$

$$y = 60 - 53.15$$

$$y = 6.85$$

$$\therefore x = 8.15 \text{ Ans.}$$

$$y = 6.85 \text{ Ans.}$$

41 → बहुलक निकालें।

परिवार माप	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
परिवारों की सं.	7	8	2	2	1

परिवार माप	परिवारों की संख्या
1-3	7
3-5	8
5-7	2
7-9	2
9-11	1

सबसे बड़ी आंशिकता (b_1) = 8

$$b_0 = 7$$

$$b_2 = 2$$

$$l = 3$$

$$h = 5 - 3 = 2$$

$$\begin{aligned} \text{अधिकतम} &= l + \frac{b_1 - b_0}{2b_1 - b_0 - b_2} \times h \\ &= 3 + \frac{8 - 7}{2 \times 8 - 7 - 2} \times 2 \\ &= 3 + \frac{1}{16 - 9} \times 2 = 3 + \frac{2}{7} = 3.285 \\ &= 3 + 0.285 = 3.285 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

42 → अधिकतम निकालें।

वर्ग-अंतराल	0-20	20-40	40-60	60-80	80-100
आंशिकता	10	35	52	61	38

हल:

वर्ग-अंतराल	आंशिकता
0-20	10
20-40	35
40-60	52
60-80	61
80-100	38
100-120	29

सबसे बड़ी आंशिकता (b_1) = 61

$$b_0 = 52, b_2 = 38, h = 80 - 60 = 20, l = 60$$

$$\begin{aligned} \text{अधिकतम} &= l + \frac{b_1 - b_0}{2b_1 - b_0 - b_2} \times h \\ &= 60 + \frac{61 - 52}{2 \times 61 - 52 - 38} \times 20 \\ &= 60 + \frac{9}{122 - 90} \times 20 \\ &= 60 + \frac{9}{32} \times 20 = 60 + \frac{45}{8} = 60 + 5.625 \\ &= 65.625 \text{ Ans.} \end{aligned}$$

प्रश्नावली: 15

1 → एक टीम फुटबॉल ने 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए: -

2, 3, 4, 5, 0, 1, 3, 3, 4, 3 सबसे ज्यादा

बार उसी टीम ने कितने गोल किए

हल: 4 बार 3 गोल किए

∴ 3 Ans

2 → एक घटना जिसका घटना निश्चित होता है, उसकी प्रायिकता क्या है?

हल: 1 Ans.

अथवा: → एक निश्चित (या निर्धारित) घटना की प्रायिकता कितनी होती है?

हल: 1 Ans.

अथवा: → किसी प्रयोग की सभी प्रारंभिक घटनाओं की प्रायिकताओं का योग कितना होता है?

हल: 1 Ans.

अथवा: → एक निश्चित या निर्धारित घटना क्या है?

हल: 1 Ans.

अथवा: → एक घटना जिसका घटित होना निश्चित या उसकी प्रायिकता क्या है?

हल: 1 Ans.

3 → किसी सिक्के के उछाल में पृष्ठ आने की प्रायिकता क्या होगी?

हल: $\frac{1}{2}$ Ans.

4 → एक पासा एक बार फेंका जाता है। 5 से कम की संख्या पाने की प्रायिकता कितनी होगी?

हल: पासा की फेंकने पर कोई एक संख्या = 1, 2, 3, 4, 5, 6 आती है।

कुल संख्या = 6

5 से काम आनेवाली संख्या = 1, 2, 3, 4
कुल संख्या = 4

$$\text{प्राधिकता} = \frac{4^2}{6^3} = \frac{2}{3} \text{ Ans.}$$

5 → एक पार्से को एक छार फेंका जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्राधिकता ज्ञात कीजिए।

(i) एक अभाज्य संख्या (ii) 2 और 6 के बीच स्थित कोई संख्या (iii) एक विषम संख्या

हल: पार्सा में संख्या = 1, 2, 3, 4, 5, 6 या 6

अभाज्य संख्या = 2, 3, 5 या 3

2 और 6 के बीच की सं. = 3, 4, 5 या 3

विषम संख्या = 1, 3, 5 या 3

$$\therefore \text{अभाज्य सं. का } (P) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{2} \text{ Ans.}$$

$$2 \text{ और } 6 \text{ के बीच का } (P) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{2} \text{ Ans.}$$

$$\text{विषम संख्या का } (P) = \frac{3}{6^2} = \frac{1}{2} \text{ Ans.}$$

6 → मान लीजिए एक पार्से को एक छार फेंका जाता है तो प्राधिकता ज्ञात कीजिए -

(i) 4 से बड़ी संख्या होने की।

(ii) 4 से छोटी या उसके बराबर सं. होने की।

हल: पार्सा में संख्या = 1, 2, 3, 4, 5, 6 या 6

(i) 4 से बड़ी सं. = 5, 6 या 2

$$\text{प्राधिकता } (P) = \frac{2}{6^3} = \frac{1}{3} \text{ Ans.}$$

(ii) 4 से छोटी या बराबर = 1, 2, 3, 4 या 4

$$\text{प्राधिकता } (P) = \frac{4^2}{6^3} = \frac{2}{3} \text{ Ans.}$$

7 → 52 पत्तों की अच्छी प्रकार से फेंकी

गई एक जगह में से एक पत्ता निकाला जाता है। निम्नलिखित को प्राप्त करने की प्राधिकता ज्ञात कीजिए।

(i) लाल रंग का छद्मप्राष्ट

(ii) एक फेस कार्ड या तस्वीर वाला पत्ता (छद्मप्राष्ट, छेगम, गुलाम)

(iii) लाल रंग का तस्वीर वाला पत्ता

(iv) पान का गुलाम (v) हुकुम का पत्ता

(vi) एक ईंट की छेगम।

हल: पत्तों की कुल सं. = 52

(i) लाल रंग का छद्मप्राष्ट की सं. = 2

$$\text{प्राधिकता } (P) = \frac{2}{52^2} = \frac{1}{26} \text{ Ans.}$$

(ii) पत्तों की कुल संख्या = 52

फेस कार्ड की संख्या = $3 \times 4 = 12$ [छद्मप्राष्ट, छेगम, गुलाम]

$$\text{प्राधिकता } (P) = \frac{12^2}{52^3} = \frac{3}{13} \text{ Ans.}$$

(iii) पत्तों की कुल संख्या = 52

लाल रंग का तस्वीर = 6 [लाल पान और ईंट का तस्वीर वाला पत्ता]

$$\text{प्राधिकता } (P) = \frac{6^2}{52^3} = \frac{3}{676} \text{ Ans.}$$

(iv) पत्तों की सं. = 52

पान का गुलाम = 1

$$\text{प्राधिकता } (P) = \frac{1}{52^2} \text{ Ans.}$$

(v) पत्तों की कुल संख्या = 52

हुकुम का पत्ता = 13 [किसी एक कास्ट]

$$\text{प्राधिकता } (P) = \frac{13^2}{52^3} = \frac{1}{4} \text{ Ans.}$$

(vi) पत्तों की कुल संख्या = 52

ईंट की छेगम = 1

$$\text{प्राधिकता} = \frac{1}{52^2} \text{ Ans.}$$

8 → अच्छी प्रकार फेंटी गई 52 पत्तों की एक गड्डी में से एक पत्ता निकाली जाती है। प्रायिकता क्या होगी यह पत्ता (i) एक रक्का है (ii) एक रक्का नहीं है।

हल: पत्तों की कुल संख्या = 52

रक्का की संख्या = 4

$$\text{प्रायिकता} = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \text{ Ans.}$$

(ii) पत्तों की कुल संख्या = 52

रक्का नहीं की संख्या = 52 - 4 = 48

$$\text{प्रायिकता (P)} = \frac{48}{52} = \frac{12}{13} \text{ Ans.}$$

9 → एक थैले में 3 लाल और 5 काली गेंदें हैं। इस थैले में से एक गेंद यादृच्छिक निकाली जाती है। इसकी प्रायिकता क्या है कि गेंद (i) लाल हो (ii) लाल नहीं हो।

हल: लाल गेंद = 3, काली गेंद = 5

कुल गेंद = 3 + 5 = 8

$$(i) \text{ लाल गेंद का प्रायिकता (P)} = \frac{3}{8} \text{ Ans.}$$

$$(ii) \text{ लाल नहीं गेंद का (P)} = \frac{5}{8} \text{ Ans.}$$

10 → एक थैले में 4 लाल, 5 काली एवं 3 पीली गेंदें हैं। कोई एक गेंद निकाली जाती है। निकाली गई गेंद के (i) पीली रंग के होने की (ii) लाल रंग नहीं होने की प्रायिकता ज्ञात करें।

हल: लाल गेंद = 4, काली गेंद = 5, पीली गेंद = 3, कुल गेंद की सं = 12

$$(i) \text{ पीली रंग की गेंद का प्रायिकता} = \frac{3}{12}$$

$$= \frac{1}{4} \text{ Ans.}$$

$$\text{लाल नहीं होने की प्रायिकता} = \frac{5+3}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \text{ Ans.}$$

11 → एक थैले में 3 नीले, 2 सफेद और 4 लाल कंचे हैं। यदि इस थैले में से एक कंचा यादृच्छिक निकाला जाता है तो इसका क्या प्रायिकता है कि यह कंचा (i) सफेद है? (ii) नीला है? (iii) लाल है?

हल: नीले कंचा = 3, सफेद कंचा = 2, लाल कंचा = 4, कुल कंचा = 9

$$(i) \text{ नीले कंचा का प्रायिकता (P)} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} \text{ Ans.}$$

$$(ii) \text{ सफेद का प्रायिकता} = \frac{2}{9} \text{ Ans.}$$

$$(iii) \text{ लाल का प्रायिकता (P)} = \frac{4}{9} \text{ Ans.}$$

12 → एक डिब्बे में 5 लाल कंचे, 8 सफेद कंचे और 4 हरे कंचे हैं। इस डिब्बे में से एक कंचा यादृच्छिक निकाला जाता है। इसकी क्या प्रायिकता है कि निकाला गया कंचा (i) लाल है (ii) सफेद है (iii) हरा नहीं है?

हल: लाल कंचा = 5, सफेद कंचा = 8, हरे कंचा = 4, कुल कंचा = 5 + 8 + 4 = 17

$$(i) \text{ लाल कंचा का प्रायिकता} = \frac{5}{17} \text{ Ans.}$$

$$(ii) \text{ सफेद कंचा का प्रायिकता} = \frac{8}{17} \text{ Ans.}$$

$$(iii) \text{ हरा नहीं कंचा का प्रायिकता} = \frac{5+8}{17} = \frac{13}{17} \text{ Ans.}$$

13 → एक जार में 36 कंचे हैं जिनमें कुछ हरे हैं और शेष नीले हैं। यदि जार में से यादृच्छया एक कंचा निकाला जाता है तो इस कंचे के हरा होने की प्रायिकता $1/2$ है तो जार में नीले कंचे की संख्या बताइए।

हल: कुल कंचे = 36
हरे कंचे की प्रायिकता = $1/2$
हरे कंचे की संख्या = x माना।

प्रश्न से,
 $\frac{x}{36} = \frac{1}{2}$
 $2x = 36$
 $x = \frac{36}{2} = 18$

$x = 18$
∴ नीले कंचे की संख्या
= $36 - x$
= $36 - 18$
= 18 Ans.

14 → एक थैले में 8 कंचे हैं जिनमें कुछ लाल हैं और शेष काला हैं। यदि जार में से यादृच्छया एक कंचा निकाला जाता है तो इस कंचे के लाल होने की प्रायिकता $3/8$ है तो जार में काला कंचा की संख्या बताइए।

हल: कुल कंचा = 8
लाल कंचे की (P) = $\frac{3}{8}$
" " " " सं = x माना।

प्रश्न से,
 $\frac{x}{8} = \frac{3}{8}$
 $x = 3$

काला कंचे की सं. = $8 - x$
= $8 - 3$
= 5 Ans.

15 → यदि $P(E) = 0.05$ है, तो 'E नहीं' की प्रायिकता क्या है?

हल: $P(E) = 0.05$ | $P(E) + P(E \text{ नहीं}) = 1$
 $P(E \text{ नहीं}) = ?$ | $P(E \text{ नहीं}) = 1 - P(E)$
प्रश्न से, | $= 1 - 0.05$
| $= 0.95$ Ans.

ग्राफ

1 → ग्राफीय विधि से हल कीजिए:

$x + 3y = 6$, $2x - 3y = 12$

हल: $x + 3y = 6$ | $2x - 3y = 12$

$x = 6 - 3y$

$x = 6 - 3 \times 1$

$x = 6 - 3 = 3$

$x = 6 - 3y$

$x = 6 - 3 \times 2$

$x = 6 - 6 = 0$

x	3	0
y	1	2

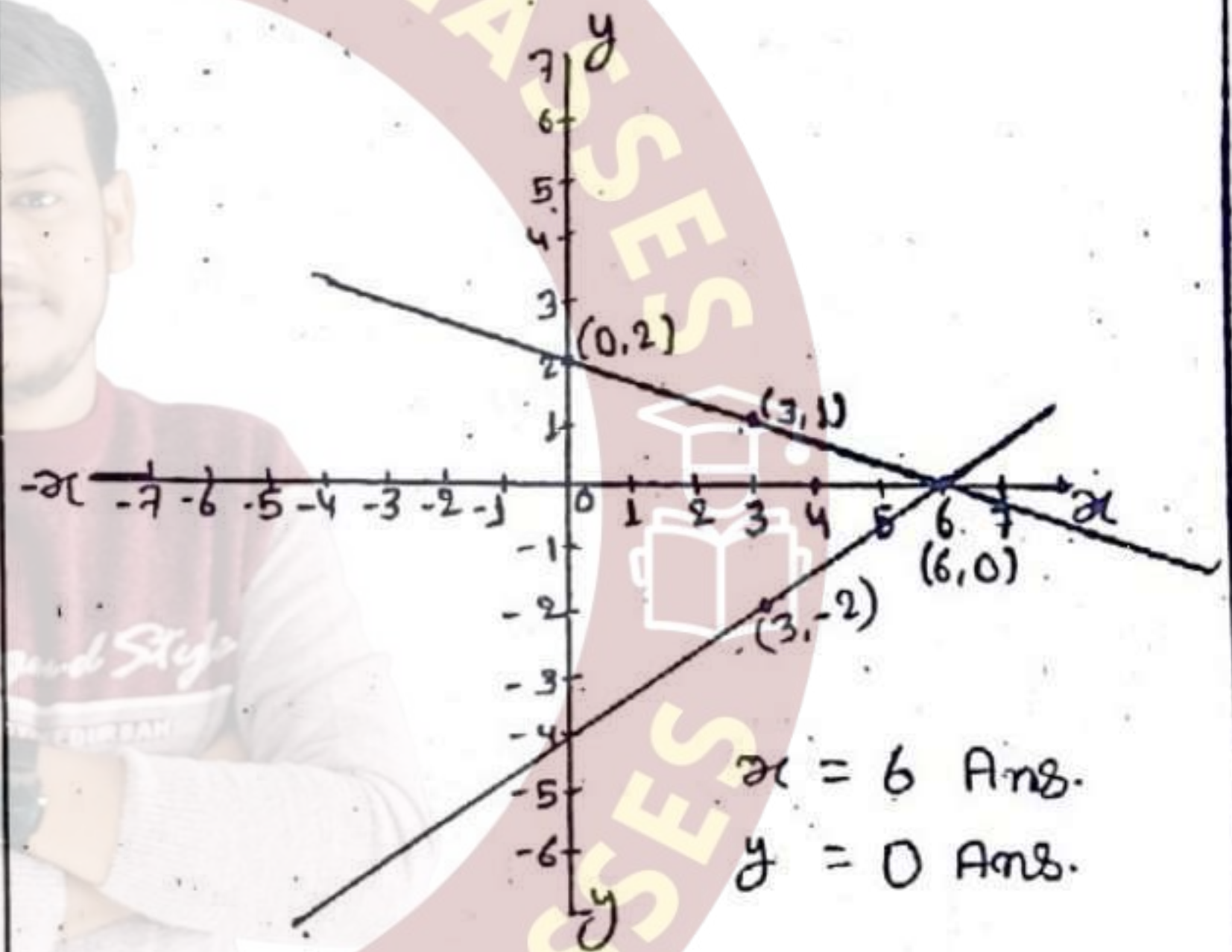
$x = \frac{12 + 3y}{2}$

$x = \frac{12 + 3 \times 0}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$x = \frac{12 + 3y}{2} = \frac{12 + 3 \times (-2)}{2}$

$x = \frac{12 - 6}{2} = \frac{6}{2} = 3$

x	6	-2
y	0	3



$x = 6$ Ans.
 $y = 0$ Ans.

2 → ग्राफीय या आलेख विधि से हल करें:

$2x + 3y = 12$, $x - y = 1$

हल: $2x + 3y = 12$

$x = \frac{12 - 3y}{2} = \frac{12 - 3 \times 0}{2}$

$x = \frac{12 - 0}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$x = \frac{12 - 3y}{2} = \frac{12 - 3 \times 2}{2}$

$x = \frac{12 - 6}{2} = \frac{6}{2} = 3$

x	6	3
y	0	2

$x - y = 1$

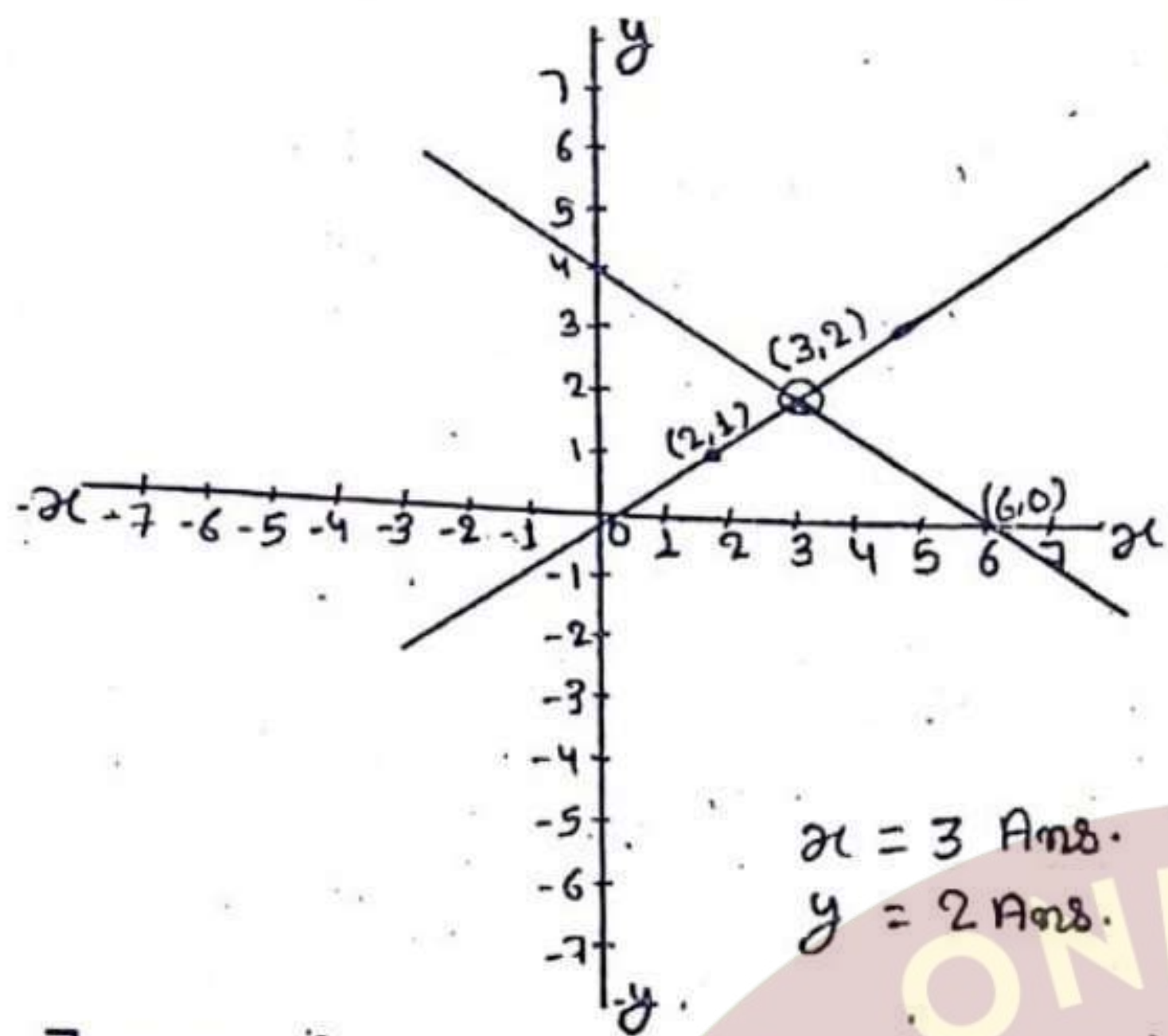
$x = 1 + y$

$x = 1 + 1 = 2$

$x = 1 + y$

$x = 1 + 2 = 3$

x	2	3
y	1	2

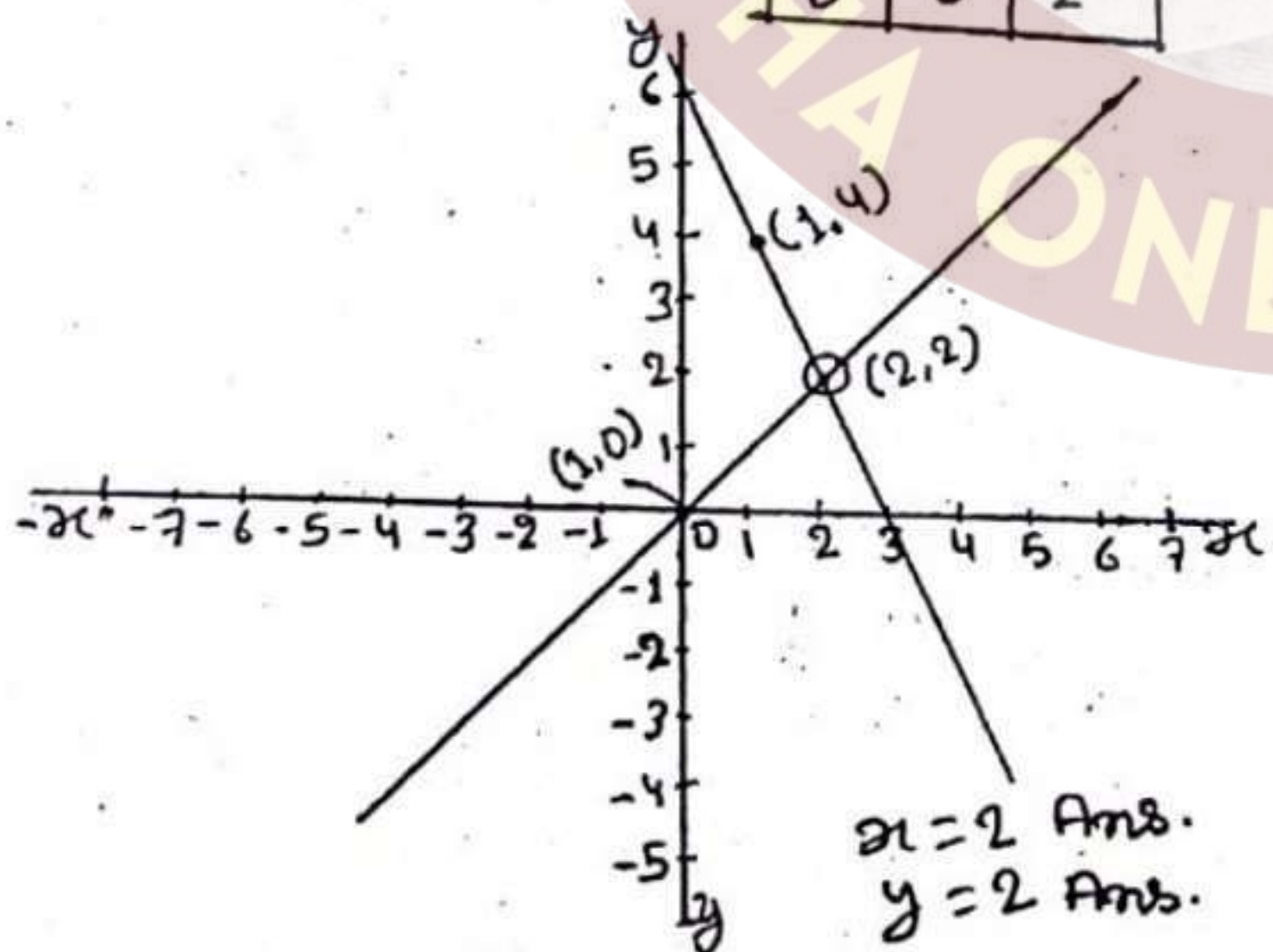


3 → ग्राफीय या आलेख विधि से हल करें:
 $2x + y - 6 = 0$ तथा $4x - 2y - 4 = 0$

हल: $2x + y - 6 = 0$ $4x - 2y - 4 = 0$
 $2x + y = 6$ $4x - 2y = 4$
 $y = 6 - 2x$ $2(2x - y) = 4 \times 2$
 $y = 6 - 2 \times 1$ $2x - y = 2$
 $y = 6 - 2 = 4$ $y = 2x - 2$
 $y = 6 - 2x$ $y = 2 \times 1 - 2$
 $y = 6 - 2 \times 1$ $y = 2 - 2 = 0$
 $y = 6 - 2 \times 2$ $y = 2x - 2$
 $y = 6 - 4 = 2$ $y = 2 \times 2 - 2$
 $y = 4 - 2 = 2$

x	1	2
y	4	2

x	1	2
y	0	2



4 → ग्राफीय या आलेख विधि से हल करें:

$x - y + 1 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$

अथवा: $2x - 2y = 2$ तथा $3x - 12 = -2y$

हल: $x - y + 1 = 0$

$y = x + 1$

$y = 2 + 1 = 3$

$y = x + 1$

$y = 3 + 1 = 4$

x	2	3
y	3	4

$3x + 2y - 12 = 0$

$3x + 2y = 12$

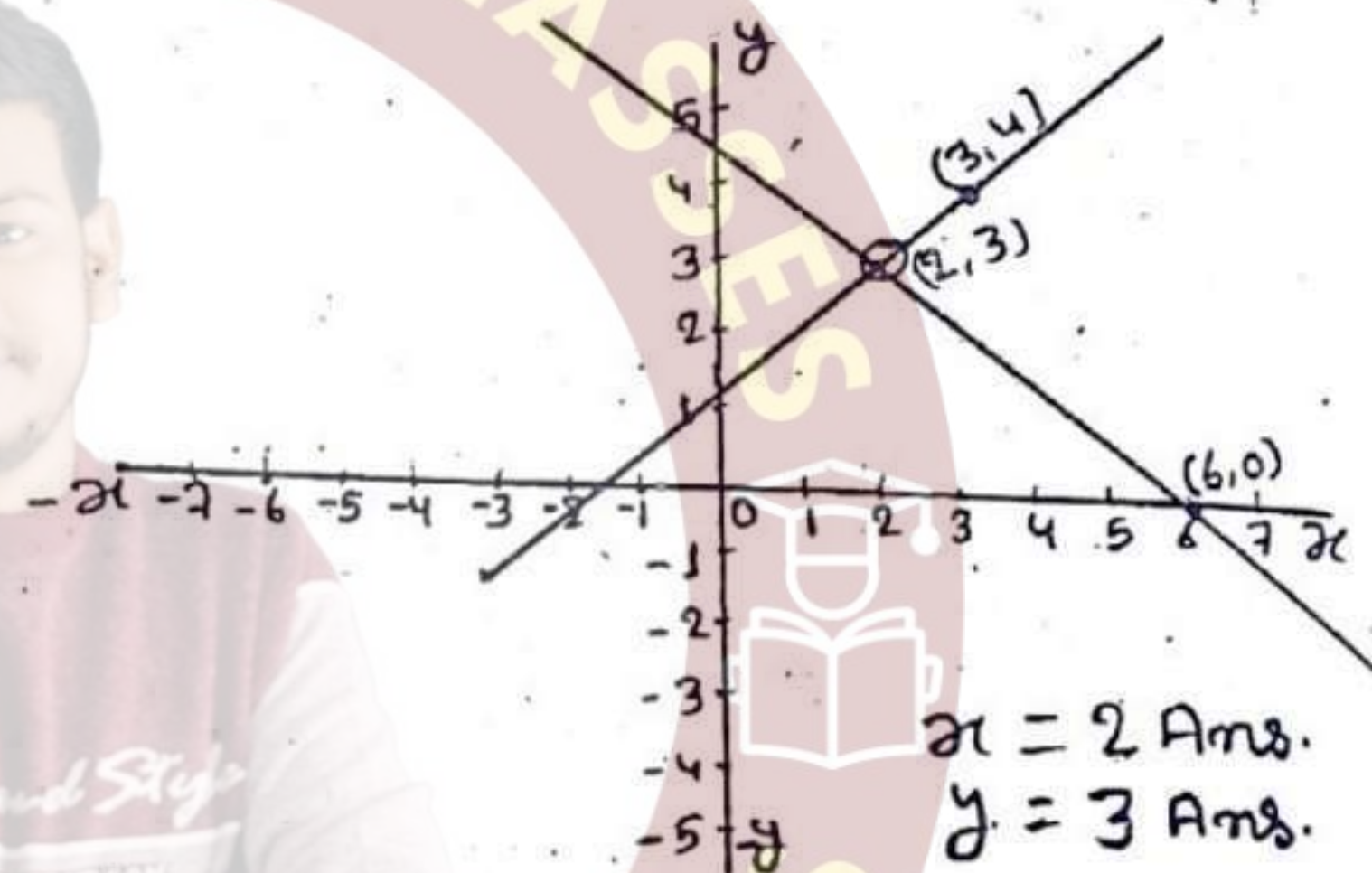
$y = \frac{12 - 3x}{2}$

$y = \frac{12 - 3 \times 0}{2} = \frac{12}{2} = 6$

$y = \frac{12 - 3x}{2} = \frac{12 - 3 \times 2}{2}$

$y = \frac{12 - 6}{2} = \frac{6}{2} = 3$

x	0	2
y	6	3



5 → ग्राफीय या आलेख विधि से हल करें:

$x - y = 1$, $2x + y = 8$

हल: $x - y = 1$

$x = 1 + y$

$x = 1 + 1 = 2$

$x = 1 + y$

$x = 1 + 2 = 3$

x	2	3
y	1	2

$2x + y = 8$

$y = 8 - 2x$

$y = 8 - 2 \times 1$

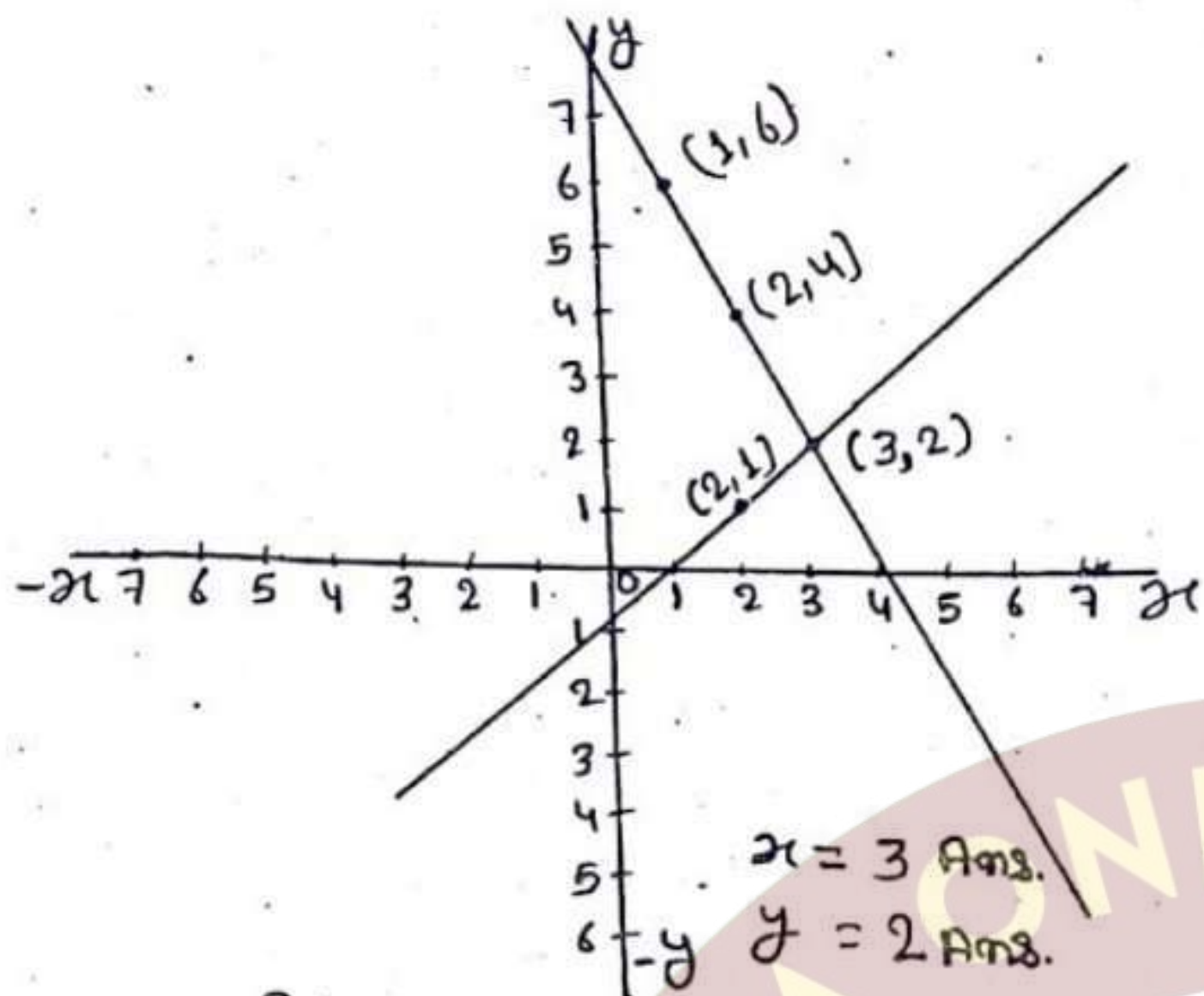
$y = 8 - 2 = 6$

$y = 8 - 2x$

$y = 8 - 2 \times 2$

$y = 8 - 4 = 4$

x	1	2
y	6	4



6 → ગ્રાફીય યા આલેખ વિધિ સે દલ કરે:

$2x + y = 6$ તથા $x - 2y + 2 = 0$

દલ: $2x + y = 6$

$y = 6 - 2x$

$y = 6 - 2 \times 1$

$y = 6 - 2 = 4$

$y = 6 - 2x$

$y = 6 - 2 \times 2$

$y = 6 - 4 = 2$

x	1	2
y	4	2

$x - 2y + 2 = 0$

$x = 2y - 2$

$x = 2 \times 2 - 2$

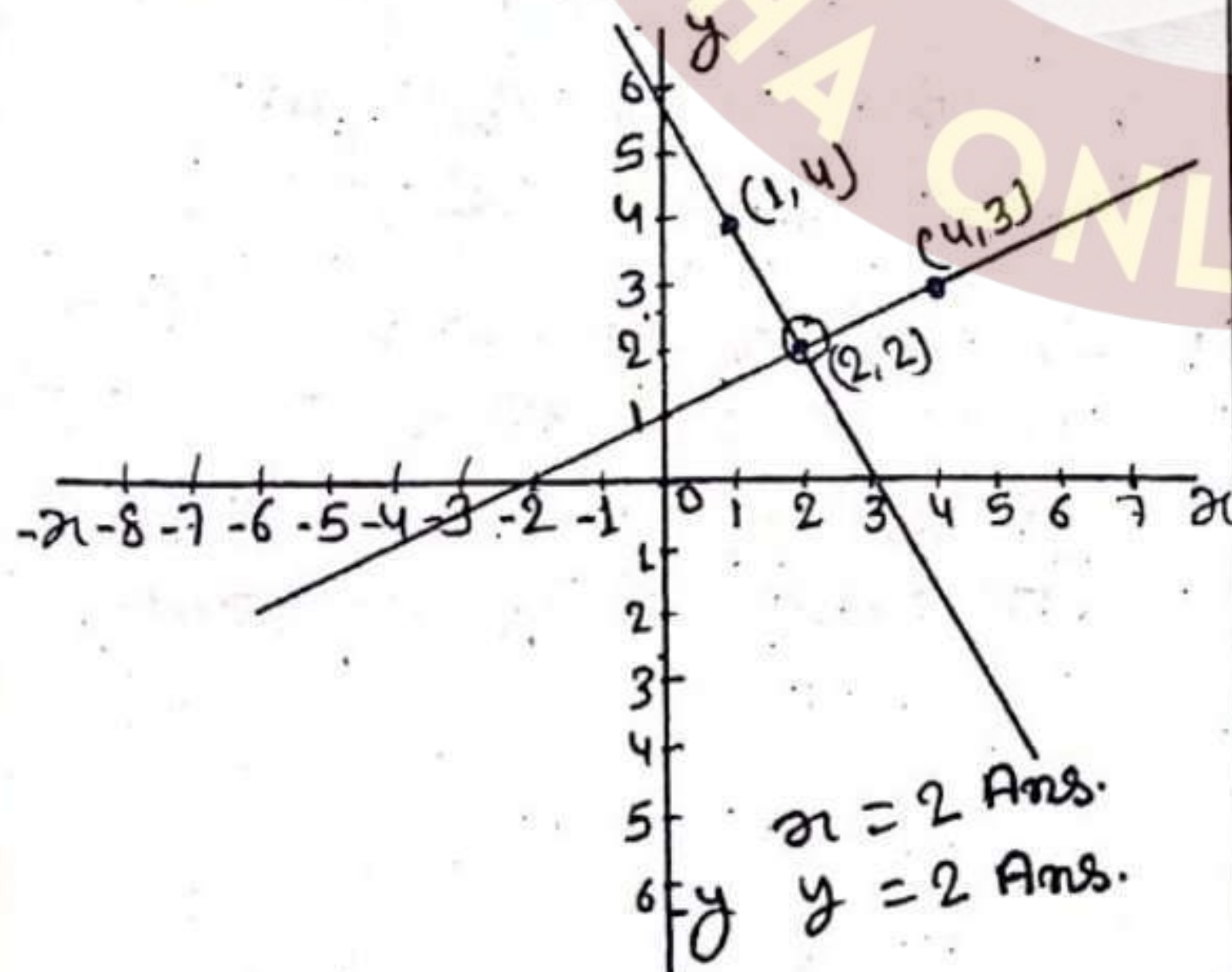
$x = 4 - 2 = 2$

$x = 2y - 2$

$x = 2 \times 3 - 2$

$x = 6 - 2 = 4$

x	2	4
y	2	3



7 → ગ્રાફીય યા આલેખ વિધિ સે દલ કરે:

$2x + y = 6$ તથા $4x - 2y = 4$

અથવા: $2x + y - 6 = 0$ તથા $4x - 2y - 4 = 0$

દલ: પ્રશ્ન 3 યા ગ્રાફ સિંગ

8 → ગ્રાફીય યા આલેખ વિધિ સે દલ કરે:

$x + y = 14$ યા $x - y = 4$

દલ: $x + y = 14$

$x = 14 - y$

$x = 14 - 6 = 8$

$x = 14 - y$

$x = 14 - 7 = 7$

x	8	7
y	6	7

$x - y = 4$

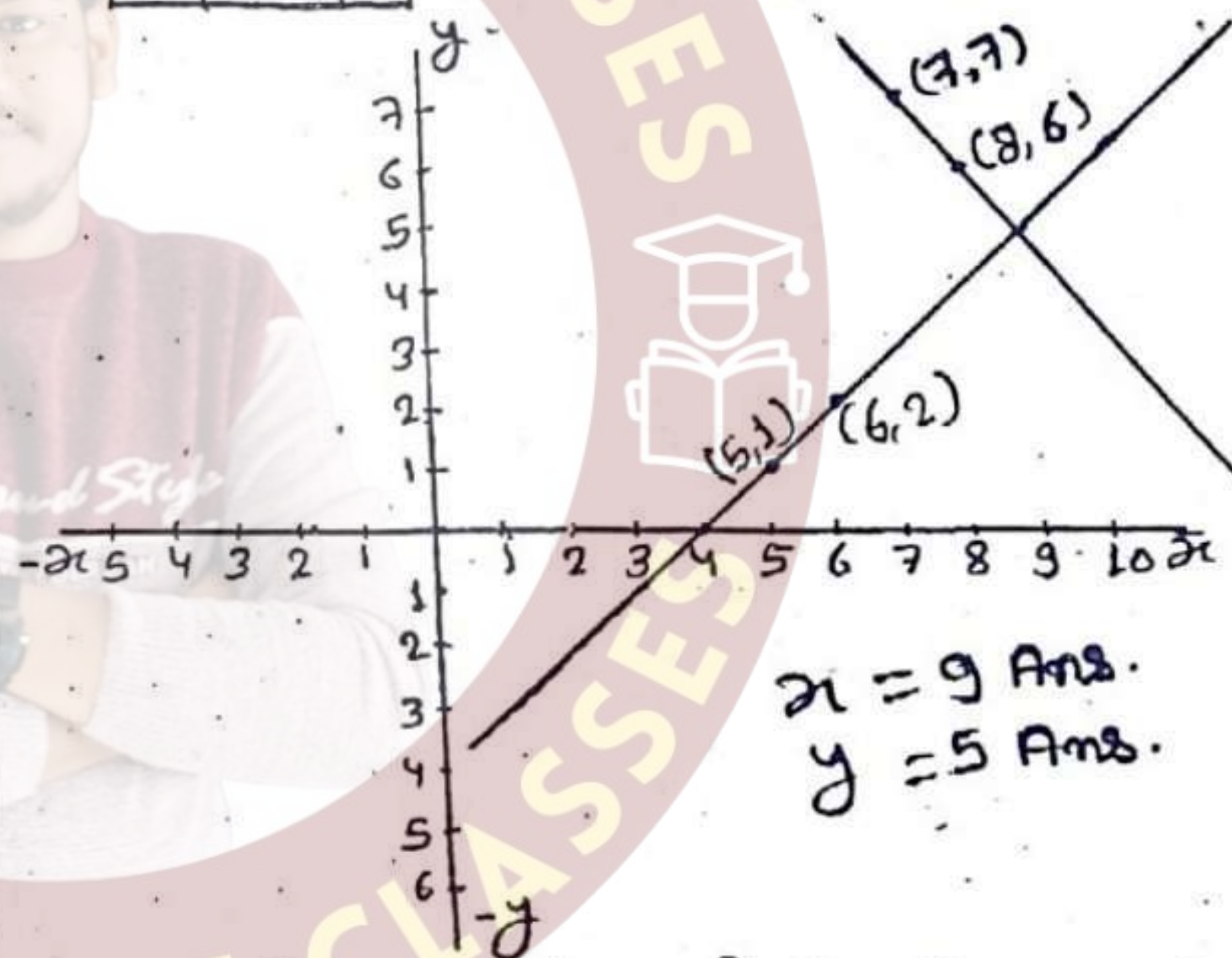
$x = 4 + y$

$x = 4 + 1 = 5$

$x = 4 + y$

$x = 4 + 2 = 6$

x	5	6
y	1	2



9 → ગ્રાફીય યા આલેખ વિધિ સે દલ કરે:

$5x - y = 5$ તથા $3x - y = 3$

અથવા: $5x - y - 5 = 0$ તથા $3x - y - 3 = 0$

અથવા: સમીકરણ $5x - y = 5$ તથા $3x - y = 3$ યા લેખાચિત્ર બનાવે. આ રેખાઓ તથા y-અક્ષ સે બને ત્રિભુજ યા ક્ષેત્રફલ દ્વાર કરે.

$$\text{दिए गए: } 5x - y = 5$$

$$y = 5x - 5$$

$$y = 5 \times 1 - 5$$

$$y = 5 - 5 = 0$$

$$y = 5x - 5$$

$$y = 5 \times 2 - 5$$

$$y = 10 - 5 = 5$$

x	1	2
y	0	5

$$3x - y = 3$$

$$y = 3x - 3$$

$$y = 3 \times 1 - 3$$

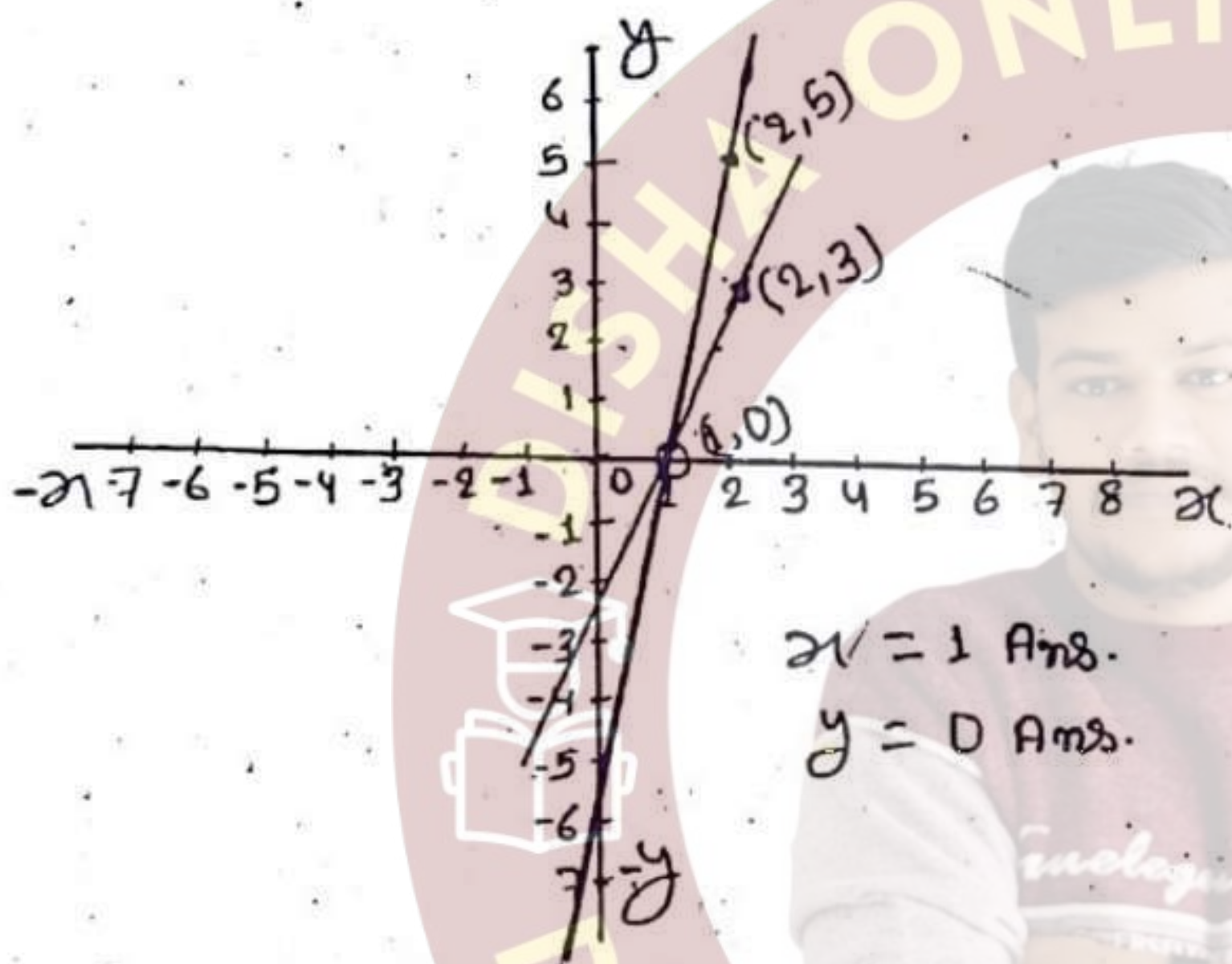
$$y = 3 - 3 = 0$$

$$y = 3x - 3$$

$$y = 3 \times 2 - 3$$

$$y = 6 - 3 = 3$$

x	1	2
y	0	3



$$x = 1 \text{ Ans.}$$

$$y = 0 \text{ Ans.}$$

त्रिभुज के तीनों निर्देशांक y -अक्ष का

$$A(1, 0), B(0, -3), C(0, -5)$$

$$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 0$$

$$y_1 = 0, y_2 = -3, y_3 = -5$$

$$\text{क्षेत्र} = ?$$

सूत्र से,

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र} = \frac{1}{2} [x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)]$$

$$= \frac{1}{2} [1(-3 + 5) + 0(-5 - 0) + 0(0 + 3)]$$

$$= \frac{1}{2} [1 \times 2 + 0 \times (-5) + 0 \times 3]$$

$$= \frac{1}{2} (2 + 0 + 0) = \frac{1}{2} \times 2 = 1 \text{ वर्ग इकाई}$$

Ans.

प्रश्नावली 11 रचनाएं

$\Rightarrow$ रचना अपने शिक्षण से अवगत पढ़ लेना, क्योंकि इसमें से एक प्रश्न 5 अंक का आयेगा।

1 $\rightarrow$ 5.6 cm लंबा एक रेखाखंड खींचिए और 2:3 अनुपात में विभाजित करेंगे। दोनो भागों को मापिए।

2 $\rightarrow$ 4cm, 5cm और 6cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर इसके समरूप एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ दिये हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{2}{3}$ गुनी हों।

3 $\rightarrow$ 5cm, 6cm और 7cm भुजाओं वाले एक त्रिभुज की रचना कीजिए और फिर एक अन्य त्रिभुज की रचना कीजिए जिसकी भुजाएँ दिये हुए त्रिभुज की संगत भुजाओं की $\frac{3}{5}$ गुनी हों।

4 $\rightarrow$ एक त्रिभुज ABC बनाइए जिसमें $BC = 6\text{cm}$, $AB = 5\text{cm}$ और $\angle ABC = 60^\circ$ हो। फिर एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जिसकी भुजाएँ ΔABC की संगत भुजाओं की $\frac{3}{4}$ गुनी हों।

5 $\rightarrow$ 6cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचिए। केन्द्र से 10cm की दूर स्थित एक बिन्दु से वृत्त पर स्पर्श रेखा कुछ की रचना कीजिए और उनकी

लंबाई मापिए।

6 → 3cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचें।
वृत्त के केन्द्र से 5cm की दूरी पर
स्थित बिन्दु से वृत्त पर दो स्पर्श
रेखा खींचें। स्पर्श रेखा की
लंबाई माप लें।

7 → 5cm त्रिज्या के एक वृत्त पर ऐसी
दो स्पर्श रेखाएँ खींचिए जो
परस्पर 60° के कोण पर मिलें।

8 → 3cm त्रिज्या का एक वृत्त खींचें।
इसके किसी बिन्दु पर
वृत्त पर केन्द्र से 7cm की
दूरी पर स्थित दो बिन्दुओं को
जोड़ लीजिए। इन दोनों बिन्दुओं से
वृत्त पर स्पर्श रेखाएँ खींचिए।

9 → 4cm त्रिज्या के एक वृत्त पर 6cm
त्रिज्या के एक संकेन्द्रीय वृत्त के
किसी बिन्दु से एक स्पर्श रेखा
की रचना कीजिए और उसकी
लंबाई मापिए। परिकल्पना से इस
माप की जाँच भी कीजिए।